Physik jenseits des Standard–Modells

7. Übung

Aufgabe 1: Sfermionen

Die Sfermionmassen-Matrix im MSSM ist gegeben als

$$\mathcal{L}_{\tilde{f}} = -\tilde{f}^{\dagger} M^2_{\tilde{f}} \tilde{f} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{bmatrix}$$

$$M^2_{\tilde{f}} = \begin{bmatrix} m_f^2 + M^2_{\tilde{f}_L} + M_Z^2(\frac{1}{2} - e_f s_W^2)\cos 2\beta & m_f(A_f - \mu r_f) \\ m_f(A_f - \mu r_f) & m_f^2 + M^2_{\tilde{f}_R} + M_Z^2 e_f s_W^2 \cos 2\beta \end{bmatrix}$$

$$\text{mit} \quad r_f = \begin{cases} \cot\beta & \text{für up-type Fermionen} \\ \tan\beta & \text{für down-type Fermionen} \end{cases}$$

Bestimme die Massen-Eigenwerte und -Eigenzustände.

Aufgabe 2: Supersymmetriebrechung in der Quantenmechanik

Das Ziel dieser Übung ist es, ein einfaches supersymmetrisches Model zu konstruieren und seine Brechung zu beobachten. Betrachten wir ein QM-System mit kommutierenden (x, y: bosonischen) und anti-kommutierenden (ξ, η: fermionischen) Koordinaten:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\mathrm{x}}^2 - \mathrm{V(x)} + \eta\dot{\xi} + \mathrm{W(x)}\eta\xi \tag{1}$$

Die Quantisierung wird mit der folgenden Beziehungen definiert:

$$[\hat{p}, \hat{x}] = i\hbar \qquad \{\hat{\eta}, \hat{\xi}\} = \hbar \qquad (\hat{\eta}^2 = \hat{\xi}^2 = 0) \tag{2}$$

Der Hamilton-Operator lautet somit:

$$H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{x}) - \frac{1}{2}W(\hat{x})[\hat{\eta}, \hat{\xi}] \tag{3}$$

Wir betrachten die folgende Darstellung der fermionischen Operatoren:

$$\hat{\xi} = \sigma_+ \text{ und } \hat{\eta} = \hbar\ \sigma_- \tag{4}$$

Die Wellenfunktion ist ein zwei-komponenter Pauli–Spinor:

$$\psi(x,t) = \begin{pmatrix} \phi_1(x,t) \\ \phi_2(x,t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

wobei ϕ_1 die bosonische und ϕ_2 die fermionische Komponente darstellt.

a) Drücke den Hamilton-Operator durch Pauli–Matrizen aus.

b) Was stellt der Operator $N_F = \hat{\eta}\hat{\xi}$ dar?

Betrachte jetzt die folgende Potentiale:

$$V(\hat{x}) = \frac{1}{2}v^2(\hat{x}) \qquad \text{und} \qquad W(\hat{x}) = \frac{\partial v(\hat{x})}{\partial x} = v'(\hat{x}) \tag{6}$$

mit den folgenden Operatoren:

$$Q_i = \frac{1}{2}\sigma_i \left[\hat{p} + i\sigma_3 v(\hat{x})\right] \qquad \text{wobei} \quad i = 1,2 \tag{7}$$

c) Berechne $[H, Q_i]$ und $\{Q_i, Q_j\}$. Was bedeuten diese Beziehungen?

d) Schreibe die Q_i in Matrixform um. Wie wirken sie auf $\psi(x,t)$?

e) Betrachte den Vakuumzustand $|0\rangle$, mit $H|0\rangle = 0$. Was ergibt sich für $Q_i|0\rangle$?

f) Zeige, dass $|f\rangle = -\sqrt{\frac{2}{E}}Q_1|b\rangle = i\sqrt{\frac{2}{E}}Q_2|b\rangle$ ein fermionischer Zustand ist. Wie sieht der entsprechende bosonische Zustand aus?

g) Wenn der Vakuumzustand eine positive Energie hat, was passiert dann mit SUSY?