Physik jenseits des Standard–Modells

7. Übung Lösung

Aufgabe 1: Sfermionen

$$
\begin{aligned}
M^2_{\tilde{f}} &= \begin{pmatrix} m_f^2 + M^2_{\tilde{f}_L} + M_Z^2(\frac{1}{2} - e_f s_W^2)\cos 2\beta & m_f(A_f - \mu r_f) \\ m_f(A_f - \mu r_f) & m_f^2 + M^2_{\tilde{f}_R} + M_Z^2 e_f s_W^2 \cos 2\beta \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} M^2_{LL} & M^2_{LR} \\ M^2_{RL} & M^2_{RR} \end{pmatrix} \\
\mathcal{L}_{\tilde{f}} &= -\begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix}^\dagger M^2_{\tilde{f}} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} m^2_{\tilde{f}_1} & 0 \\ 0 & m^2_{\tilde{f}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Eigenwerte $m^2_{\tilde{f}_{1/2}}$:

$$
\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \left(M^2_{LL} - m^2_{\tilde{f}_{1/2}}\right)\left(M^2_{RR} - m^2_{\tilde{f}_{1/2}}\right) - M^2_{LR}M^2_{RL} \\
&= m^4_{\tilde{f}_{1/2}} - m^2_{\tilde{f}_{1/2}}\left(M^2_{LL} + M^2_{RR}\right) + M^2_{LL}M^2_{RR} - M^2_{LR}M^2_{RL} \\
m^2_{\tilde{f}_{1/2}} &= \frac{1}{2}\left(M^2_{LL} + M^2_{RR}\right) \mp \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\left(M^2_{LL} + M^2_{RR}\right)^2 - 4\Big(M^2_{LL}M^2_{RR}}_{= \left(M^2_{LL} - M^2_{RR}\right)^2} - M^2_{LR}M^2_{RL}\Big)} \\
&= m_f^2 + \frac{1}{2}\left(M^2_{\tilde{f}_L} + M^2_{\tilde{f}_R} + \frac{1}{2}M_Z^2\cos 2\beta\right) \\
&\quad \mp\frac{1}{2}\sqrt{\left(M^2_{\tilde{f}_L} - M^2_{\tilde{f}_R} + \underbrace{M_Z^2\left[\frac{1}{2} - 2e_f\sin^2_W\right]\cos 2\beta}_{\text{D-Term}}\right)^2 + 4m_f^2\left(A_f - \mu r_f\right)^2}
\end{aligned}
$$

ohne den D-Term findet man das Ergebnis der Vorlesung:

$$
\boxed{m^2_{\tilde{f}_{1/2}} = m_f^2 + \frac{1}{2}\left[M^2_{\tilde{f}_L} + M^2_{\tilde{f}_R} \mp \sqrt{\left(M^2_{\tilde{f}_L} - M^2_{\tilde{f}_R}\right)^2 + 4m_f^2\left(A_f - \mu r_f\right)^2}\right]}
$$

Die Beziehung zwischen der chiralen Darstellung und Darstellung bezüglich den Masseneigenwerten ist über folgende Rotation definiert:

$$
\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_t & \sin\theta_t \\ -\sin\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix}
$$

Gesucht ist noch der Mischungswinkel θ_t:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{f}} &= -\begin{pmatrix}\tilde{f}_1\\ \tilde{f}_2\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} m^2_{\tilde{f}_1} & 0\\ 0 & m^2_{\tilde{f}_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{f}_1\\ \tilde{f}_2\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix}\tilde{f}_L\\ \tilde{f}_R\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix}\cos\theta_t & -\sin\theta_t\\ \sin\theta_t & \cos\theta_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^2_{\tilde{f}_1} & 0\\ 0 & m^2_{\tilde{f}_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_t & \sin\theta_t\\ -\sin\theta_t & \cos\theta_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{f}_L\\ \tilde{f}_R\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix}\tilde{f}_L\\ \tilde{f}_R\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} c^2\theta_t m^2_{\tilde{f}_1} + s^2\theta_t m^2_{\tilde{f}_2} & c\theta_t s\theta_t (m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2})\\ c\theta_t s\theta_t (m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2}) & s^2\theta_t m^2_{\tilde{f}_1} + c^2\theta_t m^2_{\tilde{f}_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{f}_L\\ \tilde{f}_R\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aus Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}
c^2\theta_t m^2_{\tilde{f}_1} + s^2\theta_t m^2_{\tilde{f}_2} &\stackrel{!}{=} m_f^2 + M^2_{\tilde{f}_L}\\
c\theta_t s\theta_t (m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2}) &\stackrel{!}{=} m_f(A_f - \mu r_f)\\
s^2\theta_t m^2_{\tilde{f}_1} + c^2\theta_t m^2_{\tilde{f}_2} &\stackrel{!}{=} m_f^2 + M^2_{\tilde{f}_R}
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta_f &= \frac{2m_f(A_f - \mu r_f)}{m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2}}\\
\cos 2\theta_f &= \frac{M^2_{\tilde{f}_L} - M^2_{\tilde{f}_R}}{m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2}}
\end{aligned}$$

Da die Mischung mit der Fermionmasse wächst, ist sie nur für die 3. Generation von Bedeutung.

Aufgabe 2: Supersymmetriebrechung in der Quantenmechanik

a)
$$\begin{aligned}
[\hat{\eta}, \hat{\xi}] &= \hbar[\sigma_-, \sigma_+] = \frac{\hbar}{4}[\sigma_1 - i\sigma_2, \sigma_1 + i\sigma_2]\\
&= \frac{\hbar}{4}\Big(\underbrace{[\sigma_1,\sigma_1]}_{=0} + i[\sigma_1,\sigma_2] - i[\sigma_2,\sigma_1] + \underbrace{[\sigma_2,\sigma_2]}_{=0}\Big) = \frac{2i\hbar}{4}\cdot 2i\sigma_3 = -\hbar\sigma_3\\
&\Longrightarrow \boxed{H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{x}) + \frac{1}{2}W(\hat{x})\hbar\sigma_3}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
N_F &= \hat{\eta}\hat{\xi} = \hbar\sigma_-\sigma_+ = \frac{\hbar}{4}(\sigma_1 - i\sigma_2)(\sigma_1 + i\sigma_2) = \frac{\hbar}{4}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + i[\sigma_1,\sigma_2]\right)\\
&= \frac{\hbar}{4}\left(2\cdot\mathbb{1} - 2\sigma_3\right) = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Angewandt auf eine bosonische bzw. fermionische Wellenfunktion:

$$\begin{matrix} N_F \left| \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \left| \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ N_F \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \hbar \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad N_F = \text{Fermionzahloperator}$$

c)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}v^2(\hat{x}) + \frac{1}{2}\hbar v'(\hat{x})\sigma_3 & v'(\hat{x}) &\equiv \frac{\partial}{\partial x}v(\hat{x}) \\ Q_i &= \frac{1}{2}\sigma_i[\hat{p} + i\sigma_3 v(\hat{x})] & \hat{p} &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4[H, Q_1] &= [\hat{p}^2 + v^2 + \hbar v'\sigma_3, \sigma_1\hat{p} + i\sigma_1\sigma_3 v)] \\ &= \underbrace{i[\hat{p}^2, \sigma_1\sigma_3 v]}_{(1)} + \underbrace{[v^2, \sigma_1\hat{p}]}_{(2)} + \underbrace{\hbar[v'\sigma_3, \sigma_1\hat{p}]}_{(3)} + \underbrace{i\hbar[v'\sigma_3, \sigma_1\sigma_3 v]}_{(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \qquad i[\hat{p}^2, \sigma_1\sigma_3 v]f &= i(-i\hbar)^2\sigma_1\sigma_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(vf) - v\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\right) \\ &= -i\hbar^2\sigma_1\sigma_3\left(v''f + 2v'f' + vf'' - vf''\right) \\ &= -i\hbar^2\sigma_1\sigma_3 v''f + 2\hbar\sigma_1\sigma_3 v'\hat{p}f = -\hbar^2\sigma_2 v''f - 2i\hbar\sigma_2 v'\hat{p}f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad [v^2, \sigma_1\hat{p}]f &= \sigma_1(-i\hbar)\left(v^2\frac{\partial}{\partial x}f - \frac{\partial}{\partial x}(v^2 f)\right) = -i\hbar\sigma_1\left(v^2 f' - 2vv'f - v^2 f'\right) \\ &= 2i\hbar\sigma_1 vv'f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \qquad \hbar[v'\sigma_3, \sigma_1\hat{p}]f &= -i\hbar^2\left(\sigma_3\sigma_1 v'\frac{\partial}{\partial x}f - \sigma_1\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}(v'f)\right) \\ &= -i\hbar^2\left(\sigma_3\sigma_1 v'f' - \sigma_1\sigma_3 v''f - \sigma_1\sigma_3 v'f'\right) \\ &= \hbar[\sigma_3, \sigma_1]v'\hat{p}f + i\hbar^2\sigma_1\sigma_3 v''f = 2i\hbar\sigma_2 v'\hat{p}f + \hbar^2\sigma_2 v''f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \qquad i\hbar[v'\sigma_3, \sigma_1\sigma_3 v]f &= i\hbar\big(\sigma_3\sigma_1\sigma_3 v'vf - \sigma_1\sigma_3^2 vv'f\big) \\ &= i\hbar\big(\sigma_3(2i\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1)v'vf - \sigma_1 vv'f\big) \\ &= i\hbar\big(2i\sigma_3\sigma_2 v'vf + \sigma_1\underbrace{[v', v]f}_{=0}\big) = -2i\hbar\sigma_1 v'vf \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 4[H, Q_1] &= -\hbar^2\sigma_2 v'' - 2i\hbar\sigma_2 v'\hat{p} + 2i\hbar\sigma_1 vv' + 2i\hbar\sigma_2 v'\hat{p} + \hbar^2\sigma_2 v'' - 2i\hbar\sigma_1 v'v \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die analog Rechnung für Q_2 ergibt $[H, Q_2] = 0$.

$$\begin{aligned} 4\{Q_1, Q_1\} &= \{\sigma_1(\hat{p} + i\sigma_3 v), \sigma_1(\hat{p} + i\sigma_3 v)\} \\ &= \{\sigma_1\hat{p}, \sigma_1\hat{p}\} + i\{\sigma_1\hat{p}, \sigma_1\sigma_3 v\} + i\{\sigma_1\sigma_3 v, \sigma_1\hat{p}\} - \{\sigma_1\sigma_3 v, \sigma_1\sigma_3 v\} \\ &= 2\sigma_1^2\hat{p}^2 - 2(\sigma_1\sigma_3)^2 v^2 + 2i(*) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(*)f &= \sigma_1^2\sigma_3\hat{p}vf + \sigma_1\sigma_3\sigma_1 v\hat{p}f \\
&= -i\hbar\sigma_3(v'f + vf') - i\hbar((i\sigma_2)\sigma_1 vf' \\
&= -i\hbar\sigma_3(v'f + vf') + i\hbar\sigma_3 vf' \\
&= -i\hbar\sigma_3 v'f \\
\Longrightarrow 4\{Q_1, Q_1\} &= 2\sigma_1^2\hat{p}^2 + 2\sigma_2^2 v^2 + 2\hbar\sigma_3 v' = 2\hat{p}^2 + 2v^2 + 2\hbar v'\sigma_3 = 4H
\end{aligned}
$$

Analog für $\{Q_2, Q_2\} = H$.

$$
\begin{aligned}
4\{Q_1, Q_2\} &= \{\sigma_1(\hat{p} + i\sigma_3 v), \sigma_2(\hat{p} + i\sigma_3 v)\} \\
&= \underbrace{\{\sigma_1\hat{p}, \sigma_2\hat{p}\}}_{=0} + i\{\sigma_1\hat{p}, \sigma_2\sigma_3 v\} + i\{\sigma_1\sigma_3 v, \sigma_2\hat{p}\} - \underbrace{\{\sigma_1\sigma_3 v, \sigma_2\sigma_3 v\}}_{=0} \\
&= i\{\sigma_1\hat{p}, i\sigma_1 v\} + i\{-i\sigma_2 v, \sigma_2\hat{p}\} = -\{\hat{p}, v\} + \{v, \hat{p}\} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} [H, Q_i] = 0 \\ \{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij} H \end{array}} \Longrightarrow \text{ SUSY Algebra}
$$

d)
$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{2}\big[\sigma_1(\hat{p} + i\sigma_3 v)\big] = \frac{1}{2}\big[\sigma_1\hat{p} + \sigma_2 v\big] \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \hat{p} - iv \\ \hat{p} + iv & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \hbar\partial_x + v \\ \hbar\partial_x - v & 0 \end{pmatrix} \\
Q_2 &= \frac{1}{2}\big[\sigma_2(\hat{p} + i\sigma_3 v)\big] = \frac{1}{2}\big[\sigma_2\hat{p} - \sigma_1 v\big] \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\hat{p} - v \\ i\hat{p} - v & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \hbar\partial_x + v \\ -\hbar\partial_x + v & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_3 Q_1
\end{aligned}
$$

$$
Q_1\psi(x,t) = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \hbar\partial_x + v \\ \hbar\partial_x - v & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1(x,t) \\ \phi_2(x,t) \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} (\hbar\partial_x + v)\phi_2(x,t) \\ (\hbar\partial_x - v)\phi_1(x,t) \end{pmatrix}
$$

$Q_{1,2}$ sind "off-diagonale" Operatoren, d.h. $Q_{1,2}$ angewandt auf einem bosonischen Zustand ergibt einen fermionischen Zustand und umgekehrt.

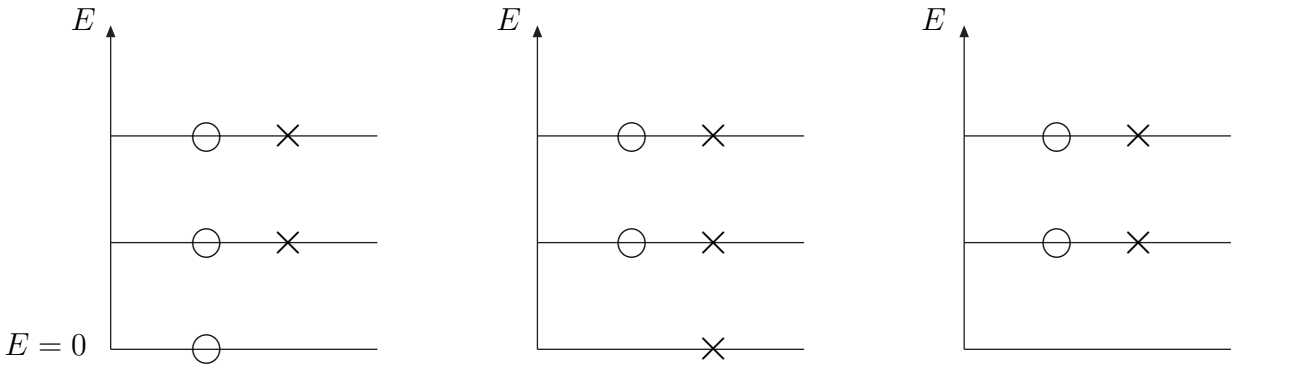
e) & f) Aus dem Antikommutator der SUSY-Algebra $\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij} H$ folgt $H = 2Q_i^2$. Jeder Eigenzustand von H mit Energie $E = 0$ wird von $Q_{1,2}$ vernichtet. Umgekehrt ist jeder Zustand, für den $Q_i|\psi\rangle = 0$ gilt, ein Eigenzustand von H mit der Energie 0. Alle anderen Zustände müssen positive Energien besitzen, da H das Quadrat eines Operators ist. Diese Zustände treten als entartete Boson-Fermion Paare auf:
$|b\rangle$ sei bosonischer Zustand mit $E \neq 0$. Daraus lässt sich mit Hilfe der SUSY-Operatoren ein fermionischer Zustand konstruieren $|f\rangle = \sqrt{\frac{2}{E}} Q_1|b\rangle = i\sqrt{\frac{2}{E}} Q_2|b\rangle$.

Mit Hilfe des Fermionzahloperators N_F kann man zeigen, dass das ein fermionischer Zustand ist. Mit $[N_F, Q_i] = i\varepsilon_{ij}Q_j$ ergibt sich

$$N_F|f\rangle = N_F\sqrt{\frac{2}{E}}Q_1|b\rangle = \sqrt{\frac{2}{E}}(i\varepsilon_{i2}Q_2 + Q_1N_F)|b\rangle = i\sqrt{\frac{2}{E}}Q_2|b\rangle = \sqrt{\frac{2}{E}}Q_1|b\rangle = |f\rangle$$

Das Spektrum eines supersymmetrischen quantenmechanischen Modells ist von der folgenden generischen Form:

($\bigcirc$ bosonischer Zustand, $\times$ fermionischer Zustand)



bosonischer bzw. fermionischer SUSY-Grundzustand kein SUSY-Grundzustand

Die Eigenwert-Gleichung zum Grundzustand $E = 0 :\ H|\psi_0\rangle = 0|\psi_0\rangle$ hat 2 Lösungen $\psi_0^{(1,2)}$. Es kann gezeigt werden (z.B Kalka/Soff Kap 2.3.5), dass diese beiden Lösungen nicht gleichzeitig nomierbar sind, das bedeutet es existiert maximal ein Grundzustand zu $E = 0$ und dieser ist bosonischer oder fermionischer Natur. Für $E > 0$ ist der Grundzustand zweifach entartet, genauso wie für alle höheren Energieniveaus in beiden Fällen.
Es ist nun wichtig zu berechnen, ob ein supersymmetrischer Grundzustand existiert oder nicht. Diese Problem ist für ein allgemeines supersymmetrischen quantenmechanischen Modell exakt gelöst worden: Die Anzahl SUSY-Grundzustände ist 1 falls die Anzahl der Nullstellen von v ungerade ist und 0 falls die Anzahl der Nullstellen von v gerade ist.

f) Respektiert der Grundzustand eine Symmetrie nicht, unter der der Hamiltonoperator invariant ist, so spricht man von spontaner Symmetriebrechung (G ist Generator der Transformation):

$$[H, G] = 0 \text{ und } \begin{cases} G|0\rangle = 0 \Longrightarrow \text{Symmetrie exakt} \\ G|0\rangle \neq 0 \Longrightarrow \text{Symmetrie spontan gebrochen} \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die 2 möglichen Energiespektren:

1. einen (fermionischen oder bosonischen) SUSY-Grundzustand mit $E = 0$: exakte SUSY

2. einen (zweifach entarteten) Grundzustand mit $E > 0$: spontan gebrochene SUSY