Physik jenseits des Standard–Modells

6. Übung Lösung

Aufgabe 1: Wess-Zumino Modell

$$
\begin{aligned}
\int \Phi^\dagger \Phi d^2\theta d^2\bar{\theta} &= (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) + F^* F \\
\Phi^2 &= \varphi^2 + 2\sqrt{2}\varphi(\theta\psi) + (\theta\theta)(2\varphi F - \psi\psi) \\
\Phi^3 &= \varphi^3 + 3\sqrt{2}\varphi^2(\theta\psi) + 3(\theta\theta)(\varphi^2 F - \varphi\psi\psi) \\
\int W(\Phi) d^2\theta &= F\left(m\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\right) - \left(\frac{m}{2} + \frac{\lambda}{2}\varphi\right)\psi\psi \\
\int W(\Phi^\dagger) d^2\bar{\theta} &= F^*\left(m\varphi^* + \frac{\lambda}{2}\varphi^{*2}\right) - \left(\frac{m}{2} + \frac{\lambda}{2}\varphi^*\right)\bar{\psi}\bar{\psi}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \boxed{
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) \\
&\quad + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + \frac{\lambda}{2}(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) \\
&\quad + F^* F - (m\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2)F - (m\varphi^* + \frac{\lambda}{2}\varphi^{*2})F^*
\end{aligned}
}
$$

Elimination der Hilfsfelder mit der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu F^*)} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^*} = F - m\varphi^* - \frac{\lambda}{2}\varphi^{*2} \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu F)} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = F^* - m\varphi - \frac{\lambda}{2}\varphi^2 \\
&\Rightarrow F = m\varphi^* + \frac{\lambda}{2}\varphi^{*2} \quad \& \quad F^* = m\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2
\end{aligned}
$$

In den Bewegungsgleichungen der beiden Hilfsfelder treten keine Ableitungen auf. Diese beschreiben daher keine Ausbreitung in Raum und Zeit und haben damit keine physikalische Bedeutung. Durch Einsetzen erhält man die Lagrangedichte unabhängig von den Hilfsfeldern:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2|\varphi|^2 \\
&\quad - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) - m\frac{\lambda}{2}|\varphi|^2(\varphi + \varphi^*) - \frac{\lambda^2}{4}|\varphi|^4
\end{aligned}
}
$$

1. Zeile: freie Bewegung des bosonischen Feldes φ (= Slepton,Squark) der Masse m
2. Zeile: freie Bewegung des fermionischen Feldes ψ (= Lepton,Quark) der Masse m
3. Zeile: Yukawa-Wechselwirkungs und Selbstwechselwirkung des bosonischen Feldes
Die Massen der Teilchen und ihrer Superpartner sind identisch. Zu beachten ist auch die Universalität der Kopplungen der Yukawa-Wechselwirkung und der Selbstwechselwirkung der skalaren Felder. Im SM gibt es keine Relation zwischen diesen Kopplungen.

Aufgabe 2: Radiative Symmetriebrechung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t} &= \frac{\alpha_t}{\pi} A \overrightarrow{M} \quad \text{mit} \quad t \equiv \log\left(\frac{Q^2}{M_{GUT}^2}\right) \quad \& \quad A \equiv \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} M_{H_u}^2 \\ M_{\tilde{t}_R}^2 \\ M_{\tilde{t}_L}^2 \end{pmatrix} \quad \& \quad \overrightarrow{M}_0 = M_0^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{Lösung}: \overrightarrow{M} &= \exp\left(\frac{\alpha_t}{\pi} A t\right) \overrightarrow{M}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_t}{\pi} t\right)^n \frac{A^n}{n!} \overrightarrow{M}_0 \\
A^2 &= 6A \implies A^n = 6^{n-1} A \\
\implies \overrightarrow{M} &= \left[\mathbb{1} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\alpha_t}{\pi} t\right)^n \frac{A^n}{n!}\right] \overrightarrow{M}_0 = \left\{\mathbb{1} + \frac{1}{6}\left[\exp\left(\frac{6\alpha_t}{\pi} t\right) - 1\right] A\right\} \overrightarrow{M}_0 \\
&\qquad \text{mit } A\overrightarrow{M}_0 = 3M_0^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{H_u}^2 &= \left\{1 + \frac{9}{6}\left[\exp\left(\frac{6\alpha_t}{\pi} t\right) - 1\right]\right\} M_0^2 = \frac{1}{2}\left[3\exp\left(\frac{6\alpha_t}{\pi} t\right) - 1\right] M_0^2 \\
M_{H_u}^2 &< 0 \Leftrightarrow 3\exp\left(\frac{6\alpha_t}{\pi} t\right) - 1 < 0 \quad \text{für} \quad t(Q^2 = M_Z^2) = \log\left(\frac{M_Z^2}{M_{GUT}^2}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{6 G_F m_t^2}{\sqrt{2}\pi^2} \log\left(\frac{M_{GUT}^2}{M_Z^2}\right) > \log 3 \\
&\Leftrightarrow m_t^2 > \frac{\sqrt{2}\pi^2}{6 G_F} \frac{\log 3}{\log\left(\frac{M_{GUT}^2}{M_Z^2}\right)} \approx 3400\ GeV^2 \Rightarrow m_t > 58.3\ GeV
\end{aligned}$$

Für grosse Topmassen ergibt sich die spontane Symmetriebrechung somit auf natürliche Weise.

$$
\begin{aligned}
M^2_{\tilde{t}_R} &= \left\{1 + \frac{6}{6}\left[exp\left(\frac{6\alpha_t}{\pi}t\right) - 1\right]\right\} M_0^2 = exp\left(\frac{6\alpha_t}{\pi}t\right) M_0^2 \; > \; 0 \\
M^2_{\tilde{t}_L} &= \left\{1 + \frac{1}{2}\left[exp\left(\frac{6\alpha_t}{\pi}t\right) - 1\right]\right\} M_0^2 = \frac{1}{2}\left[exp\left(\frac{6\alpha_t}{\pi}t\right) + 1\right] M_0^2 \; > \; 0
\end{aligned}
$$

Die Stopmassen sind damit positiv $\forall t$.