Physik jenseits des Standard–Modells

5. Übung Lösung

Aufgabe 1: Chirales Multiplett

a) Betrachten wir das Verhalten eines chiralen Superfeldes $\Phi(x,\theta) = \varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(x)$ unter den SUSY-Transformation (1) und (2):

$$\begin{aligned}
\Phi(x + 2i\theta\sigma\bar{\varepsilon}; \theta + \varepsilon) &= \Phi(x;\theta) + \delta\Phi(x;\theta) \\
\delta\Phi(x;\theta) &= 2i\theta\sigma^\mu\bar{\varepsilon}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} + \varepsilon^\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\theta^\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= 2i\theta\sigma^\mu\bar{\varepsilon}\Big[\partial_\mu\varphi(x) + \sqrt{2}\theta\partial_\mu\psi(x) + (\theta\theta)\partial_\mu F(x)\Big] + \varepsilon\Big[\sqrt{2}\psi(x) + 2\theta F(x)\Big] \\
&= \sqrt{2}\varepsilon\psi(x) + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\varepsilon}\partial_\mu\varphi(x) + 2\varepsilon\theta F(x) + 2\sqrt{2}i\theta\sigma^\mu\bar{\varepsilon}\theta\partial_\mu\psi(x) \\
&\overset{!}{=} \delta\varphi(x) + \sqrt{2}\theta\delta\psi(x) + (\theta\theta)\delta F(x)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned}
\delta\varphi(x) &= \sqrt{2}\varepsilon\psi(x) \\
\delta\psi(x) &= \sqrt{2}\big[i\partial_\mu\varphi(x)\sigma^\mu\bar{\varepsilon} + \varepsilon F(x)\big] \\
\delta F(x) &= -\sqrt{2}i\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\varepsilon}
\end{aligned}}$$

Die Lagrangdichte darf sich unter SUSY-Transformationen maximal wie eine totale Viererdivergenz transformieren, da sonst die Wirkung nicht invariant unter diesen Transformationen ist. Die Lagrangdichte wird daher nur Terme $\propto F(x)$ bzw. $\propto F^*(x)$ d.h. Koeffizienten von $\theta\theta$ bzw. $\bar{\theta}\bar{\theta}$ enthalten.

b) (Siehe auch H.Kalka/G.Soff Supersymmetrie Kapitel 10.2.2)
Das chirale Superfeld zeichnet sich durch das Verschwinden der kovarianten Ableitung $\bar{D}\Phi = 0$ aus. Im komplexen Superraum ($y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}; \theta; \bar{\theta}$) kann gezeigt werden, dass diese Bedingung gleichbedeutend mit $\frac{\partial\Phi(y;\theta;\bar{\theta})}{\partial\bar{\theta}} = 0$ $(*)$ ist. Das allgemeinste chirale Superfeld im komplexen Superraum ist damit von der Form $\Phi(y;\theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y)$. Im reellen Superraum wird daraus

$$\begin{aligned}
\Phi(x;\theta;\bar{\theta}) &= \Phi(x + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta};\theta) \\
&= \varphi(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi(x) - \frac{1}{2!}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) \\
&\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\sqrt{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(x) \\
&= \varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(x) \\
&\quad + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\mu\big(\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta}\big) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\Box\varphi(x)
\end{aligned}$$

c) (Siehe auch H.Kalka/G.Soff Supersymmetrie Kapitel 10.4.1/2/3)
Gesucht ist die SUSY-invariante Lagrangedichte $\mathcal{L}$, sodass $S = \int d^4x\mathcal{L}$ invariant unter SUSY-Transformationen ist. Die Lagrangedichte darf daher, wie schon in a) erwähnt nur Koeffizienten von $\theta\theta$ bzw. $\bar{\theta}\bar{\theta}$ enthalten. Das Produkt chiraler Superfelder ergibt wieder ein chirales Superfeld . Um zu fundamental neuen Formen von Superfeldern zu gelangen muss man ein chirales mit einem antichiralen Superfeld multiplizieren: $\Phi^\dagger\Phi$, wobei $\Phi^\dagger$ die Antiteilchen und ihre Superpartner enthält. Damit ergibt sich für den kinetischen Term der Lagrangedichte, wobei $\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$ die Koeffizienten von $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{kin} &= \Phi^\dagger(x;\theta;\bar{\theta})\Phi(x;\theta;\bar{\theta})\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\theta}^2}\Phi^\dagger(x;\theta;\bar{\theta})\Phi(x;\theta;\bar{\theta}) \\ &= \int d\theta^2 d\bar{\theta}^2\Phi^\dagger(x;\theta;\bar{\theta})\Phi(x;\theta;\bar{\theta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger(x;\theta;\bar{\theta})\Phi(x;\theta;\bar{\theta}) &= \Big[\varphi^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^* - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi^* \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu(\theta\sigma^\mu\bar{\psi}) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\Box\varphi^*\Big]\Big[\varphi + \sqrt{2}\theta\psi \\ &\quad + (\theta\theta)F + i(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\nu\varphi - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\nu(\psi\sigma^\nu\bar{\theta}) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\Box\varphi\Big]\end{aligned}$$

Da über $d^2\theta d^2\bar{\theta}$ integriert wird betrachten wir nur noch Terme in $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(\varphi^*\Box\varphi + \varphi\Box\varphi^*) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})(\partial_\mu\varphi^*)(\partial_\nu\varphi) - i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\psi})\partial_\nu(\psi\sigma^\nu\bar{\theta}) \\ &+i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\psi)\partial_\mu(\theta\sigma^\mu\bar{\psi}) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})F^*F\end{aligned}$$

mit $u\Box v = \partial_\mu(u\partial^\mu v) - (\partial_\mu u)(\partial^\mu v)$ und dem Weglassen der Viererdivergenz $\partial_\mu(u\partial^\mu v)$ ergibt sich damit für den kinetischen Anteil der Lagrangedichte (für explizite Rechnung siehe H.Kalka/G.Soff Supersymmetrie Kapitel 10.2.3):

$$\boxed{\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + F^*F}$$

d) Für den Massen- sowie den Wechselwirkungsterm werden ebenfalls die zu F proportionalen Terme herausprojiziert. Dies wird im komplexen Superraum gemacht. Für die Lagrangedichte muss daher noch der Übergang in den reellen Superraum berechnet werden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= -\int d^2\theta\frac{m}{2}\Phi^2(y;\theta)\Big|_{\theta\theta y\to x} + h.c. \\ \mathcal{L}_{int} &= -\int d^2\theta\frac{g}{3}\Phi^3(y;\theta)\Big|_{\theta\theta y\to x} + h.c.\end{aligned}$$

Terme höherer Ordnungen in Φ können nicht vorkommen, da schon Φ^4 z.B Terme $\propto \varphi^3\psi$ enthält, welche die Renormierbarkeit der Lagrangedichte zerstören ($[\mathcal{L}] \stackrel{!}{=} E^4$

mit [Fermion] $= E^{3/2}$, [Boson] $= E^1$ und [Kopplungen] $\geq E^0$). Berechnung von $W(\Phi)$ (siehe auch H.Kalka/G.Soff Supersymmetrie Kapitel 10.2.3):

$$\begin{aligned}
\Phi(y;\theta) &= \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y) \\
\Phi^2(y;\theta) &= \varphi^2(y) + 2\sqrt{2}\varphi(y)\theta\psi(y) + (\theta\theta)\big[2\varphi(y)F(y) - \psi(y)\psi(y)\big] \\
\Phi^3(y;\theta) &= \varphi^3(y) + 3\sqrt{2}\varphi^2(y)\theta\psi(y) + 3(\theta\theta)\big[\varphi^2(y)F(y) - \varphi(y)\psi(y)\psi(y)\big]
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Superpotential eines chiralen Superfeldes:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow W(\Phi) &= \frac{m}{2}\big[\varphi^2 + 2\sqrt{2}\varphi\theta\psi + (\theta\theta)(2\varphi F - \psi\psi)\big] \\
&\quad + \frac{\lambda}{6}\big[\varphi^3 + 3\sqrt{2}\varphi^2\theta\psi + 3(\theta\theta)(\varphi^2 F - \varphi\psi\psi)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^6z W(\Phi) &= \int d^4x d^2\theta W(\Phi) = \int d^4x \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} W(\Phi) \\
\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} W(\Phi) &= \frac{m}{2}(2\varphi F - \psi\psi) + \frac{\lambda}{6} 3(\varphi^2 F - \varphi\psi\psi) \\
&= \left(m\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\right) F - \left(\frac{m}{2} + \frac{\lambda}{2}\varphi\right)\psi\psi \qquad (1)
\end{aligned}$$

Andererseits

$$\begin{aligned}
W(\varphi) &= \frac{m}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{6}\varphi^3 \implies \frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi} = m\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 \\
&\qquad\qquad \& \quad \frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial\varphi^2} = m + \lambda\varphi \\
\Longrightarrow F\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi} &- \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial\varphi^2}\bar{\psi}_L^c\psi_L = F\left(m\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\right) - \frac{1}{2}\left(m + \lambda\varphi\right)\bar{\psi}_L^c\psi_L \qquad (2)
\end{aligned}$$

Damit wäre gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
S_W &= \int d^6z W(\Phi) + h.c \\
&= \int d^6z \left[F\left(m\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\right) - \frac{1}{2}\left(m + \lambda\varphi\right)\psi\psi\right] + h.c \\
&= \int d^4x \left[F\frac{\partial W(\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial\varphi^2}\bar{\Psi}_L{}^c\Psi_L\right] + h.c.
\end{aligned}$$

Die hermitische Konjugation beinhaltet die konjugiertem Felder sowie die Integration über $d^2\bar{\theta}$ anstelle von $d^2\theta$.