Physik jenseits des Standard–Modells

4. Übung Lösung

Aufgabe 1: Grassman-Zahlen

- Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \phi(0) + \phi'(0)\theta + \frac{1}{2}\phi''(0)\theta^2 + \dots \\ \{\theta,\theta\} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \theta^2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\phi(\theta) = \phi(0) + \phi'(0)\theta} \end{aligned} \tag{1}$$

- Translationsinvarianz

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\phi(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\phi(\theta + c) \\ (1) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\theta[\phi(0) + \phi'(0)\theta] &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta[\phi(0) + \phi'(0)(\theta + c)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta[\phi(0) + \phi'(0)\theta] + \underbrace{c\phi'(0)\int_{-\infty}^{\infty} d\theta}_{=0\ \forall c} \\ &\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\phi(\theta) &= \phi(0)\int_{-\infty}^{\infty} d\theta + \phi'(0)\int_{-\infty}^{\infty} \theta d\theta \stackrel{!}{=} \phi'(0)\cdot konst. \\ konst. &= 0 \Rightarrow \text{alle Integrale Null} \\ konst. &= 1 \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \theta d\theta = 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(\theta) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\theta+\varepsilon)-\phi(\theta)}{\varepsilon} \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[\phi(0)+\phi'(0)(\theta+\varepsilon)]-[\phi(0)+\phi'(0)\theta]}{\varepsilon} = \phi'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\phi(\theta) \\
&\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta\phi(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\phi(\theta)}
\end{aligned}$$

- $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\}$

$$\begin{aligned}
\phi(\theta_1,\theta_2,\dots) &= \phi(\vec{0}) + \sum_i \frac{\partial\phi(\vec{\theta})}{\partial\theta_i}\theta_i + \sum_{i\neq j}\frac{\partial^2\phi(\vec{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\theta_i\theta_j + \dots \\
&= b_0 + b_i\theta_i + b_{ij}\theta_i\theta_j + \dots \\
\text{wobei } b_{ij}\theta_i\theta_j &= -b_{ij}\theta_j\theta_i \overset{!}{=} b_{ji}\theta_j\theta_i \\
&\Rightarrow \boxed{b_{ij} \text{ antisymmetrisch oder Null}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i &= 0 \ \forall i \\
\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i\theta_j &= \delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_j \ \forall i,j
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Weyl-Spinoren und Dirac-Bispinoren

Algebra: Vektorraum (Addition, Multiplikation mit c) mit Operation $\circ$ zweier Elemente der Algebra, sodass $m \circ n \in$VR.

z.B VR der 3dim Vektoren: Addition $\surd$
Multiplikation mit c $\surd$
Skalarprodukt $\notin$ VR
+ Kreuzprodukt $\Rightarrow$ Algebra

Clifford-Algebra C_N:

aus N Generatoren $\xi^i \dots \xi^N$ erzeugt mit $\{\xi^a, \xi^b\} = 2\delta^{ab}$

hier: sind die Gamma-Matrizen γ^μ die Generatoren: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

Grassman-Algebra Λ_N
assoziativ, $\exists$ 1-Element und Generatoren ξ: $\{\xi^a, \xi^b\} = 0 \Rightarrow \theta^2 = 0$

Die Gamma-Matrizen und Spinoren sind hier in der chiralen Basis anstatt in der Dirac-Basis wie bisher definiert. In der chiralen Basis haben die Weyl-Spinoren eine einfachere Darstellung als in der Dirac-Basis und die Wirkung der Projektoren $I\!P_L$ und $I\!P_R$ sind klar erkennbar, dafür ist das Rechnen mit ungepunkteten und gepunkteten Indizes nicht ganz trivial. Spinoren mit ungepunkteten Indizes leben auf den konjugierten Räumen. Übergänge in die nicht konjugierten Räume sind über die σ-Matrizen definiert die folglich einen ungepunkteten und einen gepunkteten Index tragen. Spinoren aus zueinander dualen Räumen werden durch hoch- und tiefgestellte Indizes unterschieden und Übergänge zwischen diesen Räumen werden durch ε-Tensoren mit einem hochgestellten und einem tiefgestellten Index vermittelt. Für die Kontraktion innerhalb eines Raumes werden ebenfalls ε-Tensoren verwendet nun aber mit beiden Indizes hoch- oder tiefgestellt und gepunktet oder ungepunktet.

$$\begin{aligned} I\!P_L &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ I\!P_R &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beachte, dass einerseits gilt $\xi_\beta = \epsilon_{\beta\alpha}\xi^\alpha$ und andererseits $\xi_\beta = \xi^\alpha \epsilon_{\alpha\beta}$. Daraus folgt, dass ξ und ϵ antikommutieren.

a) $\bar{\psi}_1 I\!P_L \psi_2 = (\chi^\alpha, \xi^\dagger_{\dot{\alpha}})_1 \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \chi_1 \cdot \xi_2$

b) $\bar{\psi}_1 I\!P_R \psi_2 = (\chi^\alpha, \xi^\dagger_{\dot{\alpha}})_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix}_2 = \xi^\dagger_1 \cdot \chi^\dagger_2$

c) Wir berechnen zuerst die linke Seite

$$
\begin{aligned}
C &= i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \bar{\sigma}^0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ i\bar{\sigma}^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\bar{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} \\
\psi^c &= C\bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} i\bar{\sigma}^2 \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} \\ i\sigma^2 \begin{pmatrix} \xi^\dagger_{\dot{1}} \\ \xi^\dagger_{\dot{2}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^\dagger_{\dot{1}} \\ \xi^\dagger_{\dot{2}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi^2 \\ \chi^1 \\ \xi^\dagger_{\dot{2}} \\ -\xi^\dagger_{\dot{1}} \end{pmatrix} \\
\overline{\psi^c} &= (\psi^c)^\dagger\gamma_0 = (-\chi^{\dagger\dot{2}}, \chi^{\dagger\dot{1}}, \xi_2, -\xi_1)\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \left(\xi_2, -\xi_1, -\chi^{\dagger\dot{2}}, \chi^{\dagger\dot{1}}\right) \\
&\Rightarrow \quad \overline{\psi^c_1}I\!P_L\psi_2 = \left(\xi_2, -\xi_1, -\chi^{\dagger\dot{2}}, \chi^{\dagger\dot{1}}\right)_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = (\xi_2)_1(\xi_1)_2 - (\xi_1)_1(\xi_2)_2.
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite ergibt

$$
\begin{aligned}
\xi^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \end{pmatrix} \\
\xi_1 \cdot \xi_2 &= (\xi^\alpha)_1(\xi_\alpha)_2 = (\xi^1, \xi^2)_1 \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}_2 = (\xi^1)_1(\xi_2)_2 + (\xi^2)_1(\xi_1)_2 \\
&= (\xi_2)_1(\xi_2)_2 - (\xi_1)_1(\xi_1)_2.
\end{aligned}
$$

Wir bekommen somit $\overline{\psi^c_1}I\!P_L\psi_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$.

d) Wir benutzen den vorherigen Ausdruck für $\overline{\psi^c_1}$ und erhalten dann für die linke Seite

$$
\overline{\psi^c_1}I\!P_R\psi_2 = \left(\xi_2, -\xi_1, -\chi^{\dagger\dot{2}}, \chi^{\dagger\dot{1}}\right)_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi^{\dagger\dot{1}} \\ \chi^{\dagger\dot{2}} \end{pmatrix}_2 = -(\chi^{\dagger\dot{2}})_1(\chi^{\dagger\dot{1}})_2 + (\chi^{\dagger\dot{1}})_1(\chi^{\dagger\dot{2}})_2.
$$

Die rechte Seite ergibt

$$\chi^{\dagger\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\chi^{\dagger}_{\dot{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \chi^{\dagger\dot{1}} \\ \chi^{\dagger\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger}_{\dot{1}} \\ \chi^{\dagger}_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi^{\dagger}_{\dot{2}} \\ \chi^{\dagger}_{\dot{1}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_1^{\dagger} \cdot \xi_2^{\dagger} &= (\chi^{\dagger}_{\dot{\alpha}})_1(\chi^{\dagger\dot{\alpha}})_2 = (\chi^{\dagger}_{\dot{1}}, \chi^{\dagger}_{\dot{2}})_1 \begin{pmatrix} \chi^{\dagger\dot{1}} \\ \chi^{\dagger\dot{2}} \end{pmatrix}_2 = (\chi^{\dagger}_{\dot{1}})_1(\chi^{\dagger\dot{1}})_2 + (\chi^{\dagger}_{\dot{2}})_1(\chi^{\dagger\dot{2}})_2 \\ &= (-\chi^{\dagger\dot{2}})_1(\chi^{\dagger\dot{1}})_2 + (\chi^{\dagger\dot{1}})_1(\chi^{\dagger\dot{2}})_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\overline{\psi_1^c} I\!P_R \psi_2 = \chi_1^{\dagger} \cdot \xi_2^{\dagger}$.

e) Diese Aufgabe ist einfacher, da man nie die Komponenten ausschreiben muss

$$\begin{aligned} \overline{\psi_1}\gamma^{\mu} I\!P_L \psi_2 &= \left(\chi^{\alpha}, \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\right)_1 \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}_2 \\ &= \left(\chi^{\alpha}, \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\right)_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\xi_{\beta} \end{pmatrix}_2 = (\xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}})_1 \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}(\xi_{\beta})_2 \\ &= \xi_1^{\dagger} \cdot \bar{\sigma}^{\mu} \cdot \xi_2. \end{aligned}$$

f) Die erste Identität kann analog zu e) bewiesen werden

$$\begin{aligned} \overline{\psi_1}\gamma^{\mu} I\!P_R \psi_2 &= \left(\chi^{\alpha}, \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\right)_1 \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{\dagger\dot{\beta}} \end{pmatrix}_2 \\ &= \left(\chi^{\alpha}, \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\right)_1 \begin{pmatrix} \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\chi^{\dagger\dot{\beta}} \\ 0 \end{pmatrix}_2 = (\chi^{\alpha})_1 \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}(\chi^{\dagger\dot{\beta}})_2 \\ &= \chi_1 \cdot \sigma^{\mu} \cdot \chi_2^{\dagger}. \end{aligned}$$

Für die zweite Identität benutzen wir, dass $\sigma^{\mu} = \epsilon(\bar{\sigma}^{\mu})^T\epsilon^T$ was mit Indizes geschrieben werden kann als $\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} = \epsilon_{\alpha\beta}(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta})^T(\epsilon_{\dot{\alpha}\beta})^T$.
Da $\chi_1 \cdot \sigma^{\mu} \cdot \chi_2^{\dagger}$ eine Zahl ist, gilt

$$\begin{aligned} \chi_1 \cdot \sigma^{\mu} \cdot \chi_2^{\dagger} &= \left(\chi_1 \cdot \sigma^{\mu} \cdot \chi_2^{\dagger}\right)^T = \left((\chi^{\alpha})_1 \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}(\chi^{\dagger\dot{\alpha}})_2\right)^T \\ &= \left((\chi^{\alpha})_1 \epsilon_{\alpha\beta}(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta})^T(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})^T(\chi^{\dagger\dot{\alpha}})_2\right)^T \\ &= \left((\chi_{\beta})_1(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta})^T(\chi^{\dagger}_{\dot{\beta}})_2\right)^T \\ &= -(\chi^{\dagger}_{\dot{\beta}})_2 \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta}(\chi_{\beta})_1 = -\chi_2^{\dagger} \cdot \bar{\sigma}^{\mu} \cdot \chi_1 \qquad (1) \end{aligned}$$

g) Die Lagrangedichte für ein freies Dirac Teilchen kann mit den chiralen Koponenten geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Dirac} &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi = (\chi^{\alpha}, \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}})[i\partial_{\mu}\gamma^{\mu} - m]\begin{pmatrix}\xi_{\alpha}\\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}}\end{pmatrix} \\
&= (\chi^{\alpha}, \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}})\left[i\partial_{\mu}\begin{pmatrix}0 & \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} & 0\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\xi_{\alpha}\\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}}\end{pmatrix} \\
&= (\chi^{\alpha}, \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}})\left[i\partial_{\mu}\begin{pmatrix}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^{\dagger\dot{\alpha}}\\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\xi_{\alpha}\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}\xi_{\alpha}\\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}}\end{pmatrix}\right] \\
&= \chi\cdot\sigma^{\mu}\cdot(i\partial_{\mu}\chi^{\dagger}) + \xi^{\dagger}\cdot\bar{\sigma}^{\mu}\cdot(i\partial_{\mu}\xi) - m\left(\chi\cdot\xi + \xi^{\dagger}\cdot\chi^{\dagger}\right).
\end{aligned}$$