Physik jenseits des Standard–Modells

1. Übung Lösung

Aufgabe 1: $\underline{e^+e^- \to \mu^+\mu^-}$

totaler Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \int_{-1}^{1} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} d\cos\theta \\
&= \frac{\pi\alpha^2}{2s}\beta \int_{-1}^{1} \Big\{ Q_1 \left(1+\beta^2\cos^2\theta\right) + Q_2\left(1-\beta^2\right) + Q_3 2\beta\cos\theta \Big\} d\cos\theta \\
&= \frac{\pi\alpha^2}{2s}\beta \Big[Q_1 \left(x + \beta^2 \frac{x^3}{3} \right) + Q_2\left(1-\beta^2\right)x + Q_3\beta x^2 \Big]_{-1}^{1}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_{tot} = \frac{\pi\alpha^2}{s}\beta\Big\{ Q_1\Big(1+\frac{1}{3}\beta^2\Big) + Q_2\Big(1-\beta^2\Big)\Big\}}$$

Asymmetrie:

$$A_{FB} = \frac{1}{\sigma_{tot}} \Big\{ \underbrace{\int_0^1 dx\, \frac{d\sigma}{dx}}_{(1)} - \underbrace{\int_{-1}^0 dx\, \frac{d\sigma}{dx}}_{(2)} \Big\}$$

$$\begin{aligned}
(1) &= \frac{\pi\alpha^2}{2s}\beta \Big[Q_1 \left(x + \beta^2 \frac{x^3}{3} \right) + Q_2\left(1-\beta^2\right)x + Q_3\beta x^2 \Big]_{0}^{1} \\
&= \frac{\pi\alpha^2}{2s}\beta \Big\{ Q_1 \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) + Q_2\left(1-\beta^2\right) + Q_3\beta \Big\} \\
(2) &= \frac{\pi\alpha^2}{2s}\beta \Big\{ Q_1 \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) + Q_2\left(1-\beta^2\right) - Q_3\beta \Big\}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{A_{FB} = \frac{Q_3\beta}{Q_1\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right) + Q_2\left(1-\beta^2\right)}}$$

Woher kommt die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt?

Beispiel: $e^-(k_1)e^+(k_2) \to \gamma(q) \to \mu^-(p_1)\mu^+(p_2)$ mit $m_e = m_\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Amplitude: } iT &= \underbrace{\bar{u}_{s_1}(p_1)(-ie\gamma^\mu)v_{s_2}(p_2)}_{\mu-\text{part}} \underbrace{\left[-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right]}_{\gamma-\text{Prop.}} \underbrace{\bar{v}_{r_2}(k_2)(-ie\gamma^\nu)u_{r_1}(k_1)}_{e-\text{part}} \\
&= i\frac{e^2}{s}\Big[\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\mu v_{s_2}(p_2)\Big]\Big[\bar{v}_{r_2}(k_2)\gamma_\mu u_{r_1}(k_1)\Big]
\end{aligned}$$

gemitteltes Matrixelement:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum_{Spin}|iT|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^4}{4s^2}\sum_{s_1,s_2,r_1,r_2}\Big[\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\mu v_{s_2}(p_2)\Big]\Big[\bar{v}_{r_2}(k_2)\gamma_\mu u_{r_1}(k_1)\Big]\cdot\left(\Big[\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\nu v_{s_2}(p_2)\Big]\Big[\bar{v}_{r_2}(k_2)\gamma_\nu u_{r_1}(k_1)\Big]\right)^\dagger \\
&\overset{(1)}{=} \frac{e^4}{4s^2}\sum_{s_1,s_2,r_1,r_2}\Big[\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\mu v_{s_2}(p_2)\Big]\Big[\bar{v}_{r_2}(k_2)\gamma_\mu u_{r_1}(k_1)\Big]\cdot\Big[\bar{u}_{r_1}(k_1)\gamma_\nu v_{r_2}(k_2)\Big]\Big[\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\nu u_{s_1}(p_1)\Big] \\
&= \frac{e^4}{4s^2}\sum_{s_1,s_2,r_1,r_2}\underbrace{\Big[\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\nu u_{s_1}(p_1)\Big]\Big[\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\mu v_{s_2}(p_2)\Big]}_{\mu-\text{part}}\underbrace{\Big[\bar{v}_{r_2}(k_2)\gamma_\mu u_{r_1}(k_1)\Big]\Big[\bar{u}_{r_1}(k_1)\gamma_\nu v_{r_2}(k_2)\Big]}_{e-\text{part}} \\
&= \frac{e^4}{4s^2}\sum_{s_1,s_2,r_1,r_2}Tr\Big[v_{s_2}(p_2)\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\nu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma^\mu\Big]Tr\Big[v_{r_2}(k_2)\bar{v}_{r_2}(k_2)\gamma_\mu u_{r_1}(k_1)\bar{u}_{r_1}(k_1)\gamma_\nu\Big] \\
&\overset{(2)}{=} \frac{e^4}{4s^2}Tr\Big[(\not{p}_2 - m_\mu)\gamma^\nu(\not{p}_1 + m_\mu)\gamma^\mu\Big]\cdot Tr\Big[(\not{k}_2 - m_e)\gamma_\mu(\not{k}_1 + m_e)\gamma_\nu\Big] \\
&= \frac{e^4}{4s^2}Tr\Big[\ \not{p}_2\gamma^\nu\ \not{p}_1\gamma^\mu\Big]\cdot Tr\Big[\ \not{k}_2\gamma_\mu\ \not{k}_1\gamma_\nu\Big] \\
&\overset{(3)}{=} \frac{e^4}{4s^2}4\Big[p_2^\nu p_1^\mu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\nu\mu}(p_2p_1)\Big]\cdot 4\Big[k_{2\mu}k_{1\nu} + k_{1\mu}k_{2\nu} - g_{\mu\nu}(k_2k_1)\Big] \\
&= \frac{4e^4}{s^2}\Big[2(p_2k_2)(p_1k_1) + 2(p_2k_1)(p_1k_2) - 4(p_2p_1)(k_2k_1) + g^{\nu\mu}g_{\mu\nu}(p_2p_1)(k_2k_1)\Big] \\
&= \frac{8e^4}{s^2}\Big[(p_2k_2)(p_1k_1) + (p_2k_1)(p_1k_2)\Big]
\end{aligned}$$

mit (1) $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$

(2) $\sum_s u_s(k)\bar{u}_s(k) = (\not{k} + m) \quad \& \quad \sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = (\not{p} - m)$

und (3) $Tr(\not{p}\gamma_\mu \not{k}\gamma_\nu) = 4\Big[k_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}(p \cdot k)\Big]$

$$\begin{aligned}
\text{im CM-System:} \quad k_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,0,1) \quad \& \quad k_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,0,-1) \\
p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\
p_2 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)
\end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{s^2}\left[\frac{s^2}{16}\Big((1+\cos\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2\Big)\right] \\
&= e^4\Big(1+\cos^2\theta\Big) = 16\pi^2\alpha^2\Big(1+\cos^2\theta\Big) \\
d\sigma &= \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{F} dPS_2 \quad \overset{CM}{\Longrightarrow} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s}\overline{|\mathcal{M}|^2}
\end{aligned}$$

mit dem Fluss:

$$F = 4(k_1 k_2) = 2s$$

und dem 2-Teilchen Phasenraum:

$$dPS_2 = \frac{1}{32\pi^2} d\Omega$$

Es folgt:

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = 2\pi\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi\alpha^2}{2s}\Big(1+\cos^2\theta\Big) \quad = 1. \text{ Term für masselose Teilchen}$$

Der totale Wq für den reinen Photonaustausch ist unabhängig von der L/R-Asymmetrie Q_3 (kommt aus dem Z-Austausch) und unabhängig von Q_2 (weil masselose Teilchen):

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q_1.$$

Was steckt physikalisch hinter den $Q_{1,2,3}$?

- $Q_2 \;\hat{=}$ Massenterm $(\beta^2 = 1\big|_{m=0})$
  Der Massenterm mischt links- und rechtshändige Anteile des Spinors. Falls $m = 0$ muss somit der zu Q_2 proportionale Term verschwinden, da Q_2 als einziger der 3 Terme links-rechts mischt:

$$\begin{aligned}
Q_{LL}Q^*_{RL} &\hat{=} \mathcal{M}\Big(e^-_L e^+_R \to \mu^-_L \mu^+_R\Big)\mathcal{M}^*\Big(e^-_L e^+_R \to \mu^-_R \mu^+_L\Big) \\
&\propto \sum_s \Big[\ldots \bar{u}_L(p_1)\gamma^\nu v_R(p_2)\bar{v}_L(p_2)\gamma^\mu u_R(p_1)\ldots\Big] \\
&\propto \sum_s \Big[\ldots P_R v(p_2) v^\dagger(p_2) P_L \gamma_0 \ldots\Big] \\
&\propto \sum_s \Big[\ldots P_R v(p_2)\bar{v}(p_2) P_R \ldots\Big] \\
&\propto \Big[\ldots P_R(\not{p}_2 - m)P_R \ldots\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{L/R} &= \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) \quad \& \quad \gamma_5^2 = 1 \\
P_R P_L &= \frac{1}{4}(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = \frac{1}{4}(1-\gamma_5^2) = 0 \\
P_R P_R &= \frac{1}{4}(1+\gamma_5)(1+\gamma_5) = \frac{1}{4}(1+2\gamma_5+\gamma_5^2) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = P_R \\
P_L P_L &= P_L \\
\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu &= 2g_{\mu\nu} \qquad \& \qquad \gamma_\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma_\mu = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_R\gamma^\mu P_R &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \gamma^\mu\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \gamma^\mu P_L P_R = 0 \\
P_L m P_L &= m P_L
\end{aligned}$$

Diese Interferenz existiert somit nur bei nicht verschwindenden Massen.

- Q_3 kann nur aus dem Z-Übergang kommen, wie man aus obiger Berechnung des γ-Übergangs bzw. durch einsetzen von $Q_{ab} = e_\mu e_e$ (reine QED) sieht:
  $Q_{LL} = Q_{LR} = Q_{RL} = Q_{RR} = \tilde{Q} \quad \Longrightarrow \quad Q_1 = Q_2 = \tilde{Q}^2 \quad \& \quad Q_3 = 0$
  d.h. der Q_3-Term enthält die L/R-Asymmetrie, die aus der Kopplung des Z-Bosons an Fermionen stammt.

Nochmals zurück zu den Resultaten für den totalen Wq σ_{tot} und die Asymmetrie A_{FB}:

Der totale Wq ist unabhaengig von der L/R-Asymmetrie Q_3. Die Asymmetrie steckt lediglich im Q_3-Term, weshalb der Zähler von A_{FB} nur von Q_3 abhängt.

Aufgabe 2: 2–Teilchen–Phasenraum

$$dPS_2 = \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\ \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}\ (2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)$$

mit $$\frac{d^3p_2}{2p_2^0} \overset{(1)}{=} \frac{d^3p_2}{2p_2^0}\ dp_2^0\ \delta\Big(p_2^0 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2+m_2^2}\Big) \overset{(2)}{=} d^4p_2\ \delta\Big(p_2^2-m_2^2\Big)\theta(p_2^0)$$

$$(1)\quad \int dp_2^0 \delta\Big(p_2^0 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2+m_2^2}\Big) = 1$$

$$(2)\quad \delta\Big(p_2^2-m_2^2\Big)\theta(p_2^0) = \frac{1}{2|p_2^0|}\delta\Big(p_2^0 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2+m_2^2}\Big)$$

und
$$\begin{aligned} d^3p_1 &= |\vec{p_1}|^2\ d|\vec{p_1}|\ d\Omega \quad , \qquad d\Omega = d\cos\theta\ d\phi \\ |\vec{p_1}|^2 &= (p_1^0)^2 - m_1^2 \quad \Rightarrow |\vec{p_1}|\ d|\vec{p_1}| = p_1^0\ dp_1^0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow dPS_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\underbrace{d^4p_2\ \delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)}_{\Downarrow}\delta(p_2^2-m_2^2)\frac{|\vec{p_1}|\ p_1^0\ dp_1^0}{2p_1^0}\underbrace{\theta(\sqrt{s}-p_1^0)}_{=1,\ p_1^0\le\sqrt{s}}d\Omega$$

$$p_2 = k_1+k_2-p_1$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}|\vec{p_1}|\ dp_1^0\ \underbrace{\delta\big[(k_1+k_2-p_1)^2-m_2^2\big]}_{=\,s-2\sqrt{s}p_1^0+m_1^2-m_2^2}\ d\Omega$$

im CMS: $k_1+k_2 = (\sqrt{s},\vec{0})$

$$\Downarrow$$

$$p_1^0 = \frac{s+m_1^2-m_2^2}{2\sqrt{s}} \quad \Rightarrow |\vec{p_1}| = \frac{\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)}}{2\sqrt{s}}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\frac{\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)}}{2\sqrt{s}}\ dp_1^0\ \frac{1}{2\sqrt{s}}\ \delta\Big(p_1^0 - \frac{s+m_1^2-m_2^2}{2\sqrt{s}}\Big)\ d\Omega$$

wobei $\lambda(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{dPS_2 = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{32\pi^2\ s}\ d\cos\theta\ d\phi}$$

winkelunabhängige Streuung $\Longrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{\lambda}}{8\pi s}$

- $m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{\lambda(s, m^2, m^2)}}{s} = \sqrt{1 - \dfrac{4m^2}{s}} = \beta$

  winkelunabhängige Streuung $\Longrightarrow PS_2 = \dfrac{\beta}{8\pi}$

- $m_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{\lambda(s, 0, m^2)}}{s} = 1 - \dfrac{m^2}{s}$

  winkelunabhängige Streuung $\Longrightarrow PS_2 = \dfrac{1 - m^2/s}{8\pi}$

- $m_1 = m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{\lambda(s, 0, 0)}}{s} = 1$

  winkelunabhängige Streuung $\Longrightarrow PS_2 = \dfrac{1}{8\pi}$