Seminar SS 1987: Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung 9. Vortrag: Weinberg–Winkel und Vereinigungstheorien

Michael Spira

1 $\sin^2\theta_w$–Wert in Vereinigungstheorien am Symmetriepunkt

In der Glashow–Salam–Weinberg–Theorie (GSW–Theorie) wird eine auf den ersten Blick scheinbar vollständige Vereinigung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung erreicht. Da dieser Theorie aber das direkte Gruppenprodukt $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ($SU(2)_L \hat{=}$ Isospin, $U(1)_Y \hat{=}$ Hyperladung) zu Grunde liegt, müssen zwei unabhängige Kopplungskonstanten g und g' eingeführt werden. Über die Beziehung

$$g' = g \tan\theta_w \tag{1}$$

wird der Parameter g' durch den Weinberg–Winkel θ_w bzw. den Parameter $x_w = \sin^2\theta_w$ ersetzt. Die Vereinigung ist erst dann vollständig, wenn beide Wechselwirkungen durch einen Parameter, d.h. eine Kopplungskonstante, beschrieben werden. Dies würde bedeuten, daß der Wert für x_w in der Vereinigungstheorie festgelegt, d.h. berechenbar, ist. Dazu muß das direkte Produkt $SU(2)_L \times U(1)_Y$ in eine Obergruppe G eingebettet werden:

$$G \supset SU(2)_L \times U(1)_Y$$

Weil die QCD ebenfalls eine Eichtheorie ist, liegt der Versuch nahe, auch sie in die Vereinigungstheorie einzubetten. Die starke Wechselwirkung wird durch eine $SU(3)$–Eichtheorie beschrieben. Daher muß die Vereinigungsgruppe G die folgende Bedingung erfüllen:

$$G \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

Der Wechselwirkungsterm zwischen Leptonen bzw. Quarks und den Eichbosonen W_μ^a bzw. B_μ der elektroschwachen Wechselwirkung in der Lagrangedichte der Vereinigungstheorie sieht folgendermaßen aus:

$$\mathcal{L}'_{int} = -g\bar{\psi}\gamma^\mu[\vec{I}\vec{W}_\mu + T_Y B_\mu]\psi,$$

wobei ψ ein Symbol für die linkshändigen Fermiondubletts und die rechtshändigen Fermionsinguletts der GSW–Theorie ist. Dabei gilt die Konvention $\vec{I}\psi_R \equiv \vec{0}$.
Die Operatoren $\vec{I}$ und T_Y sind diejenigen Generatoren der Gruppe G, die dem Isospin und der Hyperladung in der GSW–Theorie entsprechen. Da die Kopplungskonstante g der Vereinigungstheorie willkürlich definiert werden kann, wird sie hier bequemerweise als Kopplungskonstante g aus der Isospin–Wechselwirkung der GSW–Theorie gewählt. Damit stimmen die I_j $(j = 1,2,3)$ in ihrer Wirkung mit denen der GSW–Theorie überein. Der Generator T_Y ist proportional zum Hyperladungsoperator Y der GSW–Theorie:

$$T_Y = \kappa \frac{Y}{2}$$

In der GSW–Theorie werden die Vektorfelder A und Z als orthogonale Transformation der W^3– und B–Bosonen eingeführt. Dadurch wird der Weinberg–Winkel θ_w als Mischungsparameter definiert:

$$\left.\begin{array}{rcl} A_\mu &=& B_\mu \cos\theta_w + W_\mu^3 \sin\theta_w \\ Z_\mu &=& -B_\mu \sin\theta_w + W_\mu^3 \cos\theta_w \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B_\mu &=& A_\mu \cos\theta_w - Z_\mu \sin\theta_w \\ W_\mu^3 &=& A_\mu \sin\theta_w + Z_\mu \cos\theta_w \end{array}\right.$$

Der Term mit W_μ^1 und W_μ^2 stellt die Wechselwirkung der $W^\pm$ mit den Fermionen dar. Dieser interessiert uns hier aber nicht. Wir betrachten nur den Teil

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -g\bar{\psi}\gamma^\mu [I_3 W_\mu^3 + T_Y B_\mu]\psi \\ &= -g\bar{\psi}\gamma^\mu [(W_\mu^3 \sin\theta_w + B_\mu \cos\theta_w)(I_3 \sin\theta_w + T_Y \cos\theta_w) \\ &\quad + (W_\mu^3 \cos\theta_w - B_\mu \sin\theta_w)(I_3 \cos\theta_w - T_Y \sin\theta_w)]\psi \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{int} = -g \sin\theta_w \bar{\psi}\gamma^\mu [I_3 + T_Y \cot\theta_w]\psi A_\mu - \frac{g}{\cos\theta_w}\bar{\psi}\gamma^\mu [I_3 - (I_3 + T_Y \cot\theta_w)\sin^2\theta_w]\psi Z_\mu$$

In der GSW–Theorie gilt:

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu Q\psi A_\mu - \frac{e}{\sin\theta_w \cos\theta_w}\bar{\psi}\gamma^\mu [I_3 - Q\sin^2\theta_w]\psi Z_\mu$$

Wegen $e = g\sin\theta_w$ folgt:

$$Q = I_3 + T_Y \cot\theta_w$$

Aus der GSW–Theorie weiß man:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

$$\Longrightarrow T_Y = \frac{Y}{2}\tan\theta_w$$

Nun folgt:

$$\sum Q^2 = \sum I_3^2 + 2\sum I_3 T_Y \cot\theta_w + \sum T_Y^2 \cot^2\theta_w$$

Summiert man über ein ganzes Multiplett der Gruppe G, so folgt:

$$\sum_M I_3 T_Y = 0$$

$$\sum_M T_Y^2 = \sum_M I_3^2$$

Daher:

$$\sum_M Q^2 = (1 + \cot^2 \theta_w) \sum_M I_3^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \sin^2 \theta_w = \frac{\sum I_3^2}{\sum Q^2} \tag{2}$$

Zur 1.Generation der GSW–Theorie gehören folgende Fermionen:

$$u, d, \nu_e, e.$$

In der Lagrangedichte wird die Cabibbo–Kobayashi–Maskawa–Mischung vernachlässigt. Diese Fermionen tragen Quantenzahlen: Ladung, Colorladung, Isospin. Da die Quarks 3 Colorfreiheitsgrade besitzen, gibt es von ihnen drei linkshändige Dubletts (sechs Fermionen) und sechs rechtshändige Singuletts. Von den Leptonen gibt es ein linkshändiges Dublett (zwei Fermionen) und ein rechtshändiges Singulett. Dies sind insgesamt 15 Fermionen, die zur ersten Generation gehören. Konventionsgemäß wählt man sie als linkshändige Fermionen und Antifermionen. Die linkshändigen Antifermionen sind Singuletts, denn für die Ladungskonjugation gilt:

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T \quad \text{mit} \quad C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^+ = -C^T$$

Damit:

$$(\psi^c)_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi^c = i\frac{1-\gamma_5}{2}\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T = i\gamma^2\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^0\bar{\psi}^T = i\gamma^2\gamma^0\frac{1-\gamma_5}{2}\bar{\psi}^T = C\frac{1-\gamma_5}{2}\bar{\psi}^T$$

$$= C[\bar{\psi}\frac{1-\gamma_5}{2}]^T = C[\psi^+\gamma^0\frac{1-\gamma_5}{2}]^T = C\{[\frac{1+\gamma_5}{2}\psi]^+\gamma^0\}^T = C[(\psi_R)^+\gamma^0]^T = C\overline{(\psi_R)}^T$$

$$\overline{[(\psi^c)_L]} = [(\psi^c)_L]^+\gamma^0 = [C(\psi_R)^T]^+\gamma^0 = \overline{(\psi_R)}^* C^+\gamma^0$$

$$=^1 \quad \overline{(\psi_R)}^*\gamma^0 C = [(\psi_R)^+\gamma^0]^*\gamma^0 C = (\psi_R)^T\gamma^0\gamma^0 C = (\psi_R)^T C$$

Also:

$$(\psi^c)_L = C\overline{(\psi_R)}^T \qquad\qquad \overline{[(\psi^c)_L]} = (\psi_R)^T C$$

[1] $\gamma^{\mu+}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$

Somit ist $(\psi^c)_L$ ein Isospin–Singulett. Folgende Objekte bilden daher die erste Generation:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \qquad e_L^+ \qquad \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L \qquad \begin{matrix} u_{iL}^c \\ d_{iL}^c \end{matrix} \qquad (i = 1,2,3 \quad \hat{=} \quad \text{blau, rot, grün})$$

Diese erste Generation stellt ein Multiplett der Symmetriegruppe G dar. Der Parameter $\sin^2\theta_w$ kann durch Abzählen ermittelt werden:
Damit:

	N_c	I_3	$N_c I_3^2$	Q	$N_c Q^2$
ν_{eL}	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0
e_L^-	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-1	1
e_L^+	1	0	0	1	1
u_L	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
d_L	3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
u_L^c	3	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
d_L^c	3	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\sum Q^2 = \frac{16}{3} \qquad\qquad \sum I_3^2 = 2$$

$$\sin^2\theta_w = \frac{3}{8} = 0.375 \tag{3}$$

Dieser Wert ist zu groß! Der experimentell bestimmte Wert ist:

$$\sin^2\theta_w(\mu = 100\ \text{GeV}) = 0.230 \pm 0.0048 \tag{4}$$

Dies ist aber nicht verwunderlich, denn wir haben den Wert am Vereinigungspunkt berechnet, wo die ungebrochene Symmetrie der Vereinigungsgruppe G gültig ist. Diese Symmetrie ist aber bei kleinen Energien ($\mu \sim 100$ GeV) nicht gültig. Aus der Formel (1) aus der GSW–Theorie folgt:

$$\sin^2\theta_w = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} \tag{5}$$

Dabei ist g' die $U(1)$–Kopplungskonstante der Hyperladung und g die $SU(2)$–Kopplungskonstante des Isospins. Diese sind jedoch keineswegs wirkliche Konstanten, sondern energieabhängig. Sie sind sogenannte gleitende Kopplungskonstanten (running

couplings). Damit wird auch die elektrische Ladung

$$e = g \sin \theta_w \tag{6}$$

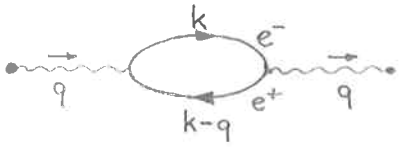
energieabhängig.

2 Abschirmung und Antiabschirmung in abel'schen und nicht–abel'schen Eichfeldtheorien

Bisher wurden bei der Berechnung von Matrixelementen nur die Terme niedrigster Ordnung in der Born–Reihe der S–Matrix betrachtet. Die 'Realität', die von einer Lagrangedichte erfaßt wird, wird aber erst von der ganzen Reihe exakt beschrieben, d.h. die Korrekturen höherer Ordnung müssen berechnet werden. Durch diese entsteht die Energie– bzw. Abstandsabhängigkeit der Kopplungskonstanten. Die Berechnung dieser Korrekturen wird am Beispiel einer abel'schen Eichfeldtheorie, der QED, vorgeführt. Obwohl der abel'sche Fall noch am einfachsten ist, zeigt er dennoch die neu auftauchende Problematik deutlich. In der QED wird das elektromagnetische Feld einer Punktladung durch Ausstrahlung virtueller Photonen beschrieben. Der Bornterm des Photonpropagators $D_{\mu\nu}$ wird durch folgenden Graphen beschrieben:

$$\Longrightarrow D^{(0)}_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon}$$

Wir betrachten nun Korrekturen höherer Ordnung zum Photonpropagator, die sogenannten Vakuumpolarisationen. Die nächsthöhere Ordnung sieht folgendermaßen aus:



$$\Longrightarrow D^{(1)}_{\mu\rho} = D^{(0)}_{\mu\rho} I^{\rho\sigma} D^{(0)}_{\sigma\nu}$$

Nach den Feynman–Regeln folgt:

$$I_{\rho\sigma} = -i^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-e\gamma_\rho)_{\alpha\beta} \frac{(\not{k} + m)_{\beta\gamma}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-e\gamma_\sigma)_{\gamma\delta} \frac{(\not{k} - \not{q} + m)_{\delta\alpha}}{(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Tr[\gamma_\rho(\not{k} + m)\gamma_\sigma(\not{k} - \not{q} + m)]}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)[(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

Das erste Minuszeichen taucht auf, weil es sich hier um eine geschlossene Fermionschleife handelt. Nun gilt:

$$4\,T_{\rho\sigma}(k,q) := Tr[\gamma_\rho(\not{k}+m)\gamma_\sigma(\not{k}-\not{q}+m)]$$

$$= 4m^2 g_{\rho\sigma} + 4[k_\rho(k-q)_\sigma - g_{\rho\sigma}k(k-q) + (k-q)_\rho k_\sigma]$$

also:

$$T_{\rho\sigma}(k,q) = k_\rho(k-q)_\sigma + k_\sigma(k-q)_\rho - g_{\rho\sigma}(k^2 - kq - m^2)$$

Der Polarisationstensor $I_{\rho\sigma}$ sieht daher folgendermaßen aus:

$$I_{\rho\sigma} = -4ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{T_{\rho\sigma}(k,q)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)[(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

Der Zähler des Integranden ist von der Ordnung k^2, während der Nenner von der Ordnung k^4 ist. Damit ist das Integral gar nicht definiert, da es quadratisch divergent ist. Mit Hilfe der Renormierungstheorie kann man die Divergenzen des Integrals so abspalten, daß man sie als Faktor zu der Kopplungskonstante schlagen kann. Der Wert dieser neu definierten Kopplungskonstanten ist dann experimentell festzulegen. Die Divergenz wird also in einen physikalischen Parameter gesteckt, der dann als endlicher Wert redefiniert wird. Der verbleibende endliche Term stellt dann den gesuchten, q–abhängigen Teil dar. Zuerst müssen aber die Grundlagen der Renormierungstheorie bereitgestellt werden. Der Grund für die auftretenden Schwierigkeiten besteht darin, daß die Betrachtung der Korrekturen höherer Ordnung die ursprüngliche experimentelle Definition der Parameter bzw. Feldoperatoren e, m, ψ, A zerstört. Diese Korrekturen stellen Quantenfluktuationen dar, die auf Grund der Heisenberg'schen Unschärfe auftreten können. Dies führt dazu, daß die Größen renormiert (umnormiert) werden müssen. Seien e_0, m_0, ψ_0, A_0 die ursprünglichen normierten Größen und e,m,ψ,A die renormierten. Die renormierten Meßgrößen, die man im Experiment sieht, werden folgendermaßen eingeführt:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt{Z_2}\,\psi \\ A_0 &= \sqrt{Z_3}\,A \\ e_0 &= \frac{Z_1}{Z_2\sqrt{Z_3}}\,e \\ m_0 &= m - \delta m \end{aligned} \tag{7}$$

Die Renormierungskonstanten Z_i $(i = 1,2,3)$ und δm existieren zwar nicht in der ursprünglichen Theorie, können aber in einer 'geringfügig' abgewandelten Theorie berechnet werden. Hier wird die Methode der Dimensions–Regularisierung behandelt. Dabei geht man vom vierdimensionalen in einen n $(= 4-\epsilon)$–dimensionalen Raum über, wobei $n < 4$ mit $n \epsilon R$. In diesem nicht ganzzahlig dimensionalen Raum können die Divergenzen abgespalten und als Renormierungskonstanten definiert werden. Danach wird der Grenzwert $n \to 4$ $(\epsilon \to 0)$ durchgeführt. Die QED–Lagrangedichte sieht nun so aus:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{0\mu\nu}F_0^{\mu\nu} + \bar{\psi}_0(i\,\not{\partial} - m_0)\psi_0 - e_0\bar{\psi}_0\,\not{A}_0\psi_0$$

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{CT}$$

Kinetischer Teil:

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\ \partial\!\!\!/ - m)\psi$$

Wechselwirkungs–Teil:

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\ A\!\!\!/\psi$$

Counter–Terme:

$$\mathcal{L}_{CT} = -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (Z_2 - 1)\bar{\psi}(i\ \partial\!\!\!/ - m)\psi + Z_2\delta m\bar{\psi}\psi - (Z_1 - 1)e\bar{\psi}\ A\!\!\!/\psi$$

In der Dimensions–Regularisierung schreiben wir nun für $I_{\rho\sigma}$:

$$\tilde{I}_{\rho\sigma} = -4ie^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{T_{\rho\sigma}(k,q)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)[(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

Wir benutzen die Feynman–Darstellung:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(A-B]x + B]^2} \tag{8}$$

Damit:

$$\tilde{I}_{\rho\sigma} = -i\frac{4e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int d^n k \frac{T_{\rho\sigma}(k,q)}{(k^2 + 2kQ - M^2)^2}$$

mit

$$Q = -xq \qquad\qquad M^2 = m^2 - xq^2$$

Jetzt muß das Integral

$$I_n(Q) := \int \frac{d^n k}{(k^2 + 2kQ - M^2)^\alpha}$$

berechnet werden (hier für $\alpha = 2$). Nach wie vor wird die Nullkomponente des Vierervektors k von den räumlichen Komponenten $\vec{k}$ unterschieden. Das räumliche Integral über $d^{n-1}\vec{k}$ wird in Kugelkoordinaten umgeschrieben:

$$\int d^n k f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \int_0^\infty d|\vec{k}|\ |\vec{k}|^{n-2} \int_{\Omega_{n-1}} d\Omega_{n-1}\ f(k)$$

Als erstes substituieren wir hier $K = k + Q$ und definieren $\omega := |\vec{K}|$:

$$I_n(Q) = \int \frac{d^n K}{(K^2 - M^2 - Q^2)^\alpha}$$

$$= \int_0^\infty d\omega\ \omega^{n-2} \int_{-\infty}^{\infty} dK^0 \int d\Omega_{n-1}\ [(K^0)^2 - \omega^2 - (M^2 + Q^2)]^{-\alpha}$$

Da der Integrand nur noch von K^0 und ω abhängt, folgt mit

$$\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$I_n(Q) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty d\omega\ \omega^{n-2}\ 2\int_0^\infty dK^0\ [(K^0)^2 - \omega^2 - (M^2+Q^2)]^{-\alpha}$$

Hier gilt: $M^2 + Q^2 = m^2 - q^2x(1-x) > 0 \quad (q^2 < 0)$. Die Substitutionen $K^0 = \sqrt{\omega^2 + M^2 + Q^2}\ t$ und $\omega = \sqrt{M^2+Q^2}\ s$ führen zu:

$$I_n(Q) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})(M^2+Q^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\ 2\int_0^\infty \frac{s^{n-2}ds}{(1+s^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}}\ 2\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2-1)^\alpha}$$

Mit den folgenden Formeln (siehe Anhang)

$$2\int_0^\infty t^{2x-1}(1+t^2)^{-(x+y)}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{9}$$

$$2\int_0^\infty t^{2x-1}(t^2-1)^{-(x+y)}dt = i^{2x}(-1)^{-(x+y)}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{10}$$

folgt:

$$I_n(Q) = \int \frac{d^nk}{(k^2+2kQ-M^2)^\alpha} = \frac{(-1)^\alpha i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)(Q^2+M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}} \tag{11}$$

Durch Differentiation nach Q ergibt sich:

$$\int \frac{k^\mu\ d^nk}{(k^2+2kQ-M^2)^\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha+1}i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)(Q^2+M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\ Q^\mu$$

$$\int \frac{k^\mu k^\nu\ d^nk}{(k^2+2kQ-M^2)^\alpha} = \frac{(-1)^\alpha i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)(Q^2+M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\left\{Q^\mu Q^\nu\ \Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(Q^2+M^2)\ \Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)\right\} \tag{12}$$

Damit können wir unseren Polarisationstensor regularisieren:

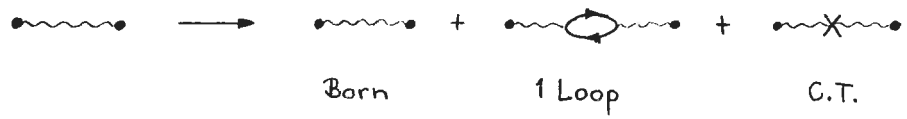
$$\tilde{I}_{\rho\sigma} = -i\frac{e^2}{4\pi^4}\int_0^1 dx \int d^nk\ \frac{2k_\rho k_\sigma - q_\rho k_\sigma - q_\sigma k_\rho - g_{\rho\sigma}(k^2-kq-m^2)}{(k^2+2kQ-M^2)^2}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2\ \Gamma(2)}\int_0^1 dx\ (Q^2+M^2)^{-2+\frac{n}{2}}\left\{(1-2)g_{\rho\sigma}(Q^2+M^2)\frac{2}{n-2}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\right.$$
$$\left. +\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)[2Q_\rho Q_\sigma + q_\rho Q_\sigma + q_\sigma Q_\rho + g_{\rho\sigma}(-Q^2-qQ+m^2)]\right\}$$

Mit $e^2 = 4\pi\alpha$, $\Gamma(2) = 1$ und $Q^2 + M^2 = m^2 - q^2x(1-x)$ folgt:

$$\tilde{I}_{\rho\sigma} = -2\ \frac{\alpha}{\pi}\ \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right)(q_\rho q_\sigma - g_{\rho\sigma}q^2)\int_0^1 \frac{x(1-x)dx}{[m^2-q^2x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}}$$

Der Grenzwert $n \to 4$ dieses Ausdrucks existiert nicht. Aber wir haben ja den Counterterm $I^{CT}_{\rho\sigma}$ in niedrigster Ordnung noch nicht in die Rechnung miteinbezogen, denn der nackte Photonpropagator geht über in:



Zuerst spalten wir die Divergenz im obigen Ausdruck ab. Es gilt:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma_E + \mathcal{O}(x) \qquad \text{mit} \quad \gamma_E = 0.5772\ldots$$

Andererseits:

$$[m^2 - q^2x(1-x)]^{-(2-\frac{n}{2})} = \exp\left\{-\frac{4-n}{2}\log[m^2 - q^2x(1-x)]\right\}$$

$$= 1 - \frac{4-n}{2}\log(m^2) - \frac{4-n}{2}\log\left[1 - \frac{q^2}{m^2}\,x(1-x)\right] + \mathcal{O}[(4-n)^2]$$

Somit:

$$\tilde{I}_{\rho\sigma} = (-g_{\rho\sigma}q^2 + q_\rho q_\sigma)\left\{-\frac{2\alpha}{3\pi}\,\frac{1}{4-n} + \frac{\alpha}{3\pi}(\log(m^2) + \gamma_E)\right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\log\left[1 - \frac{q^2}{m^2}\,x(1-x)\right]dx + \mathcal{O}(4-n)\right\}$$

Der Counterterm sieht wie folgt aus:

$$I^{CT}_{\rho\sigma} = (Z_3 - 1)(g_{\rho\sigma}q^2 - q_\rho q_\sigma)$$

denn:

$$D^{(0)}_{\mu\rho} I^{CT\rho\sigma} D^{(0)}_{\sigma\nu} = (Z_3 - 1) D^{(0)}_{\mu\nu}$$

Damit:

$$I_{\rho\sigma} = \tilde{I}_{\rho\sigma} + I^{CT}_{\rho\sigma}$$

$$I_{\rho\sigma} = (-g_{\rho\sigma}q^2 + q_\rho q_\sigma)\left\{1 - Z_3 - \frac{2\alpha}{3\pi}\,\frac{1}{4-n} + \frac{\alpha}{3\pi}(\log(m^2) + \gamma_E)\right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\log\left[1 - \frac{q^2}{m^2}\,x(1-x)\right]dx + \mathcal{O}(4-n)\right\}$$

Im Limes $n \to 4$ fallen die Terme von $\mathcal{O}(4-n)$ weg:

$$D_{\mu\nu} = D^{(0)}_{\mu\nu} + D^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon}\left\{2 - Z_3 - \frac{2\alpha}{3\pi}\,\frac{1}{4-n} + \frac{\alpha}{3\pi}\,(\log(m^2) + \gamma_E)\right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\log\left[1 - \frac{q^2}{m^2}\,x(1-x)\right]dx\right\}_{n\to 4}$$

Die Normierung der Einteilchen–Wellenfunktion zu 1 entspricht der Bedingung:

$$D_{\mu\nu}(q) \to \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon} \qquad (q^2 \to 0)$$

Daher:

$$Z_3 = 1 - \frac{2\alpha}{3\pi}\,\frac{1}{4-n} + \frac{\alpha}{3\pi}(\log(m^2) + \gamma_E) \quad \text{(nur } q^2\text{-unabhängige Terme!)} \tag{13}$$

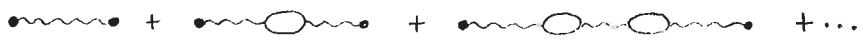
Also:

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon}[1 + \Pi(q^2)] \tag{14}$$

mit

$$\Pi(q^2) = 2\,\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\log\left[1 - \frac{q^2}{m^2}\,x(1-x)\right]dx \tag{15}$$

Bisher haben wir nur die Einloop–Korrektur zum Photonpropagator berechnet. Jedoch können beliebig viele solcher Loops auftreten, d.h. der gesamte Photonpropagator wird durch folgende unendliche Reihe beschrieben:



Graphen der Sorte



werden hier vernachlässigt, da sie nur Korrekturen der Ordnung $\alpha/\pi \approx 1/400$ zum einfachen Loop–Graphen bringen:

$$1 + \mathcal{O}(\frac{\alpha}{\pi}) \approx 1$$

Uns interessiert nur der führende Logarithmus (leading log).

Die Fourier–Transformierte e^2/q^2 des Coulomb–Potentials geht in dieser Näherung über in:

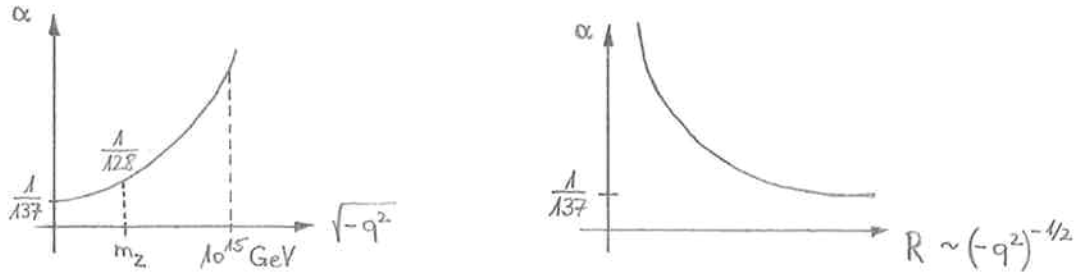
$$\frac{e^2}{q^2}\,[1 + \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \cdots] = \frac{1}{q^2}\,\frac{e^2}{1 - \Pi(q^2)} \equiv \frac{e^2(q^2)}{q^2}$$

Man kann den erhaltenen Ausdruck durch eine abstandsabhängige effektive Ladung, die das Coulomb–Potential erzeugt, beschreiben:

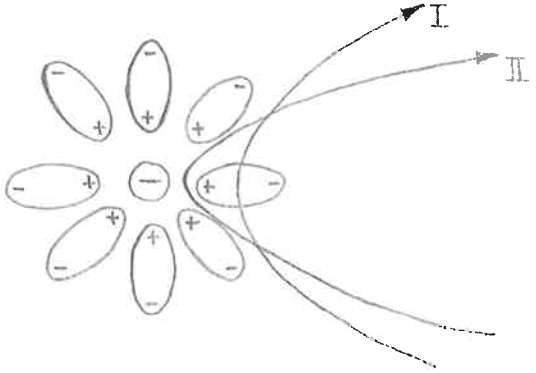
$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha}{1 - 2\,\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\log\left[1 - \frac{q^2}{m^2}\,x(1-x)\right]dx} \tag{16}$$

Für große $(-q^2) \gg m^2$ geht dieser Ausdruck im leading log über in:

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log\left(-\frac{q^2}{m^2}\right)} \qquad (-q^2 >> m^2) \tag{17}$$



Dieses Verhalten kann man anschaulich in qualitativer Weise verstehen:



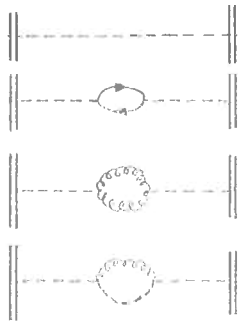
Man denke sich eine nackte Punktladung im Vakuum. In ihrem Umfeld erzeugt sie elektrische Dipole (z.B. e^+e^-–Paare). Fliegt nun eine Probeladung vorbei, so sieht sie auf Grund der Ladungsabschirmung nicht die volle Ladung. Auf Flugbahn I wird ein Teil vom Minus–Pol des Dipols abgeschirmt, so daß der Probekörper auf Flugbahn II eine größere Ladung sieht. Da es noch mehr Fermionen als die e^+ bzw. e^- gibt, die in den Loops auftreten können, lautet die korrekte Formel für die Feinstrukturkonstante mit

$$n := \sum_{Fermionen} e_i^2 :$$

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - n\,\frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \log\left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right)} \tag{18}$$

In nicht–abel'schen Eichtheorien, denen eine $SU(N)$ zu Grunde liegt, muß man noch die Selbstwechselwirkung der Eichbosonen, die in abel'schen Eichtheorien nicht auftritt, berücksichtigen. Um die einzelnen Beiträge ein wenig zu veranschaulichen, betrachtet man schwere Fermionen (=niedrige Energien) und studiert die Wechselwirkung in der Coulomb–Eichung ($\partial_i G^{ai} = 0$). In dieser Eichung werden longitudinal polarisierte (coulombische) von transversal polarisierten Eichbosonen unterschieden. Der Austausch coulombischer Eichbosonen dominiert bei kleinen Energien. Die einzelnen Beiträge sind:

----- = coulombisch ~~~~ = transversal

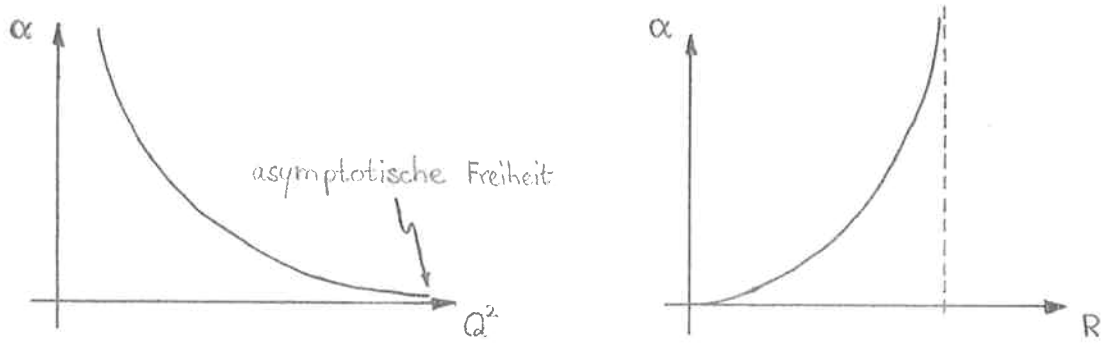


$$\begin{aligned}\alpha(q^2) &= \alpha(\mu^2)\,[\,1 \\ &+ 2\,N_F\frac{\alpha(\mu^2)}{12\pi}\,\log\left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right) \\ &+ N\frac{\alpha(\mu^2)}{12\pi}\,\log\left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right) \\ &- 12\,N\frac{\alpha(\mu^2)}{12\pi}\,\log\left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right)\end{aligned}$$

Hier ist N_F die Anzahl der Fermionen, die im Loop auftreten können. Den Vorzeichenunterschied zwischen den letzten beiden Graphen kann man als Analogie zum Biot–Savart'schen Gesetz verstehen. Coulombische Eichbosonen führen zur Abstoßung gleichnamiger Ladungen, während transversale zur Anziehung gleichnamiger Ströme führen. Damit führt die Ersetzung eines transversalen durch ein coulombisches Eichboson zu einer Vorzeichenumkehr! Summiert man die obigen Beiträge auf und bildet die geometrische Reihe über die Loops, so ergibt sich für die gleitende Kopplungkonstante in einer $SU(N)$–Eichtheorie: $(Q^2 := -q^2)$

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + (11N - 2N_F)\,\frac{\alpha(\mu^2)}{12\pi}\log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)} \qquad (Q^2 >> m^2) \qquad (19)$$

Die Größe μ^2 ist der Renormierungspunkt, an dem die Kopplungskonstante experimentell bestimmt werden muß. Ist $N_F < 11\ N/2$, so geht $\alpha(Q^2)$ mit wachsendem Q^2 asymptotisch gegen Null. Diesen Effekt nennt man asymptotische Freiheit. Diese erklärt z.B. den Erfolg des Partonmodells in der QCD, in dem die Partonen (Quarks) bei hohen Energien als freie Teilchen behandelt werden.



3 $\sin^2\theta_w$ bei kleinen Energien

Nach unserem Exkurs in die Renormierungstheorie wenden wir uns jetzt wieder unserem Problem der Berechnung von $\sin^2\theta_w$ bei kleinen Energien zu. Im Standardmodell gibt es drei Kopplungskonstanten: $(\cot\theta_w^{symm} = \sqrt{5/3})$

(i) $g_3 := g_s$ für die starke Wechselwirkung $(SU(3))$

(ii) $g_2 := g$ für den Isospin ($SU(2)$)

(iii) $g_1 := g' \cot \theta^{symm}$ für die Hyperladung ($U(1)$)

Die "Konstante" g_1 steigt mit wachsender Energie, da sie zu einer abel'schen Eichtheorie gehört, während g_2 und g_3 fallen, wie es in nicht–abel'schen Eichtheorien vorkommt. Damit schneiden sich g_1 und g_3 in einem Punkt mit der Energie M. Dieser Punkt heißt Symmetriepunkt und soll die Schwelle darstellen, bei der die Theorie in die Vereinigungstheorie übergeht: $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \to G$. Definiert man

$$\alpha_i := \frac{g_i^2}{4\pi} \tag{20}$$

so ergibt sich M aus den Gleichungen für α_1 und α_3. Als zweite Variable ist $\alpha_0 := \alpha_1(M) = \alpha_3(M)$ aus beiden Gleichungen bestimmbar. Bei der bisherigen Betrachtung haben wir α_2 außer Acht gelassen. Aus der zugehörigen $SU(2)$–Eichtheorie ergibt sich die Steigung der Geraden $1/\alpha_2 = 1/\alpha_2(Q)$. Es fehlt noch der Achsenabschnitt. Dieser wird durch die Forderung festgelegt, daß bei $Q = M$ die Vereinigungstheorie gültig ist. Dort gilt also $g_2(M) = g(M) = g'(M) \cot \theta_w^{symm}$, also:

$$\alpha_1(M) = \alpha_2(M) = \alpha_3(M)$$

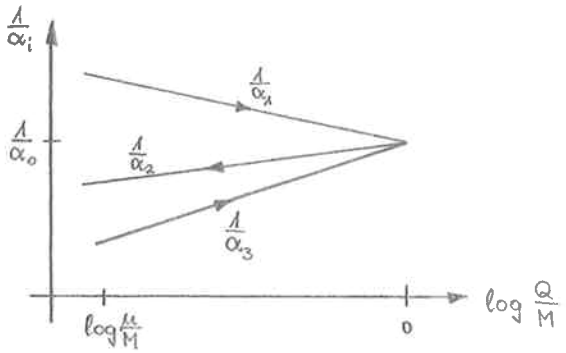
Dadurch ist auch $\alpha_2(Q)$ vollständig festgelegt, und man kann α_2 bei kleinen Energien berechnen. Da α_2 mit dem Weinberg–Winkel zusammenhängt, kann man jetzt den Parameter $\sin^2 \theta_w$ bei kleinen Energien berechnen.

Nach den Gleichungen des letzten Kapitels folgt mit den Ersetzungen $\mu \to M$ und $Q \to \mu$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_1} &= \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{M}{\mu}\right)\left(\frac{4}{3}N_G + \frac{N_H}{10}\right) \\
\frac{1}{\alpha_2} &= \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{M}{\mu}\right)\left(\frac{22}{3} - \frac{4}{3}N_G - \frac{N_H}{6}\right) \\
\frac{1}{\alpha_3} &= \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{M}{\mu}\right)\left(11 - \frac{4}{3}N_G\right)
\end{aligned} \tag{21}$$

Hier ist N_G die Anzahl der Fermion–Generationen, die im Loop auftreten können, und N_H die Anzahl der Higgs–Bosonen, die bisher vernachlässigt wurden. Diese verhalten sich ähnlich wie die Fermionen — sie erzeugen Abschirmungseffekte. Trägt man $1/\alpha_i$

gegen $\log(Q/M)$ auf, so ergeben sich folgende Geraden (qualitativ):



Die Pfeile geben den Rechenweg wieder, aus α_1 und α_3 bestimmt man α_0 und M. Dadurch wird α_2 festgelegt, und man berechnet $\alpha_2(\mu)$. Die gesamte Rechnung geht davon aus, daß sich die Theorie zwischen $\mu \approx 100$ GeV und M nicht ändert.

Die Feinstrukturkonstante $\alpha(\mu)$ läßt sich aus $\alpha_1(\mu)$ und $\alpha_2(\mu)$ bestimmen. Nach (6) gilt:

$$\alpha(\mu) = \alpha_2(\mu)\sin^2\theta_w(\mu) \tag{22}$$

Aus (5) folgt:

$$\sin^2\theta_w(\mu) = \frac{g'^2(\mu)}{g'^2(\mu)+g^2(\mu)} = \frac{\alpha_1(\mu)\tan^2\theta_w(M)}{\alpha_1(\mu)\tan^2\theta_w(M)+\alpha_2(\mu)}$$

wegen $\tan^2\theta_w(M) = 3/5$:

$$\sin^2\theta_w(\mu) = \frac{3\alpha_1(\mu)}{3\alpha_1(\mu)+5\alpha_2(\mu)}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu)} + \frac{5}{3}\,\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{8}{3\alpha_0} + \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{M}{\mu}\right)\left(-\frac{22}{3}+\frac{32}{9}N_G+\frac{N_H}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha_s(\mu)} - \frac{3}{8\alpha(\mu)} = \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{M}{\mu}\right)\left(-\frac{33}{4}-\frac{N_H}{8}\right)$$

$$\Longrightarrow M = \mu\exp\left\{\frac{8}{33}\,\frac{\pi}{1+\frac{N_H}{66}}\left(\frac{3}{8\alpha(\mu)}-\frac{1}{\alpha_s(\mu)}\right)\right\} \tag{23}$$

$$\Longrightarrow \alpha_0 = \left\{\frac{1}{3\alpha_s(\mu)}\,\frac{\frac{N_H}{22}+\frac{16}{33}N_G-1}{1+\frac{N_H}{66}} + \frac{1}{2\alpha(\mu)}\,\frac{1-\frac{4}{33}N_G}{1+\frac{N_H}{66}}\right\}^{-1} \tag{24}$$

Nun hat man:

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_s(\mu)} + \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{M}{\mu}\right)\left(11-\frac{4}{3}N_G-\frac{22}{3}+\frac{4}{3}N_G+\frac{N_H}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{6}\,\frac{1+\frac{N_H}{22}}{1+\frac{N_H}{66}}\,\frac{1}{\alpha(\mu)} + \frac{5}{9}\,\frac{1-\frac{N_H}{110}}{1+\frac{N_H}{66}}\,\frac{1}{\alpha_s(\mu)}$$

Mit (22) folgt dann:

$$\sin^2\theta_w(\mu) = \frac{1}{6}\,\frac{1+\frac{N_H}{22}}{1+\frac{N_H}{66}} + \frac{5}{9}\,\frac{1-\frac{N_H}{110}}{1+\frac{N_H}{66}}\,\frac{\alpha(\mu)}{\alpha_s(\mu)} \tag{25}$$

Experimentell wurden bei $\mu = 100$ GeV folgende Werte gemessen:

$$\alpha_s(\mu) = 0.10 \ldots 0.13 \qquad\qquad \alpha(\mu) = \frac{1}{128}$$

Im minimalen Higgs–Schema ($N_H = 1$) erhält man:

$$M = 2.4 \times 10^{14} \ldots 1.4 \times 10^{15}\ \text{GeV}$$

$$\alpha_0 = 0.024$$

$$\sin^2\theta_w(\mu) = 0.204 \ldots 0.214$$

Da die Energie M nur etwa 10^{-4} der Planck–Masse

$$M_{Pl} = 1.22 \times 10^{19}\text{GeV},$$

bei der die Gravitation die dominierende Rolle zu spielen beginnt, beträgt, kann die Gravitation in dieser Vereinigungstheorie in guter Näherung vernachlässigt werden.

Der Wert für $\sin^2\theta_w(\mu)$ kommt dem experimentell bestimmten Wert (4) relativ nahe, jedenfalls wesentlich näher als $\sin^2\theta_w^{symm} = 3/8$. Die ganze Rechnung stellt ja auch eine Idealisierung der wirklichen Situation dar. Hier erwartet man noch logarithmische Korrekturen, die den Wert vielleicht noch etwas anheben.

4 Andere Symmetriegruppen

Baut man die Theorie auf anderen Symmetriegruppen auf, so ergeben sich etwas andere Werte für den Weinberg–Winkel.

(i) Links–Rechts–Symmetrie

Legt man die $SO(10)$ zu Grunde und führt rechtshändige W's und Z's ein, so ist das direkte Produkt $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ in $SO(10)$ enthalten. Werden links– und rechtshändige Vektorbosonen gleichberechtigt behandelt, so erhält man:

$$\sin^2\theta_w = 0.275$$

Dieser Wert ist zu groß. Sind die Kopplungskonstanten g_L und g_R für die links– bzw. rechtshändigen Vektorbosonen unterschiedlich groß (spontane Symmetriebrechung!), so ergibt sich:

$$\sin^2\theta_w = 0.22 \tag{26}$$

Dieser Wert ist akzeptabel. Im minimalen Higgs–Schema ($N_H = 1$, ein Higgs–Dublett) ist

$$m(Z_R) \sim \mathcal{O}(1 \text{ TeV}) \quad \text{und} \quad m(W_R) \sim \mathcal{O}(10^{10} \text{ GeV})$$

In nicht–minimalen Higgs–Schemen ist es möglich, daß

$$m(Z_R) \sim m(W_R) \sim \mathcal{O}(1 \text{ TeV}),$$

so daß man diese Vektorbosonen in zukünftigen Experimenten erzeugen könnte.

(ii) Supersymmetrie

Die Supersymmetrie ordnet jedem Fermion bzw. Vektorboson einen SUSY–Partner zu (gluinos, squarks etc.). Zur Symmetriebrechung sind letztendlich zwei Higgs–Dubletts notwendig. Die Massen der SUSY–Partikel sind von der Größenordnung $m \leq \mathcal{O}(1 \text{ TeV})$.

In dieser Theorie gewinnt man:

$$\sin^2\theta_w(\mu) = \frac{1}{6}\,\frac{1+\frac{N_H}{6}}{1+\frac{N_H}{16}} + \frac{5}{9}\,\frac{1-\frac{N_H}{30}}{1+\frac{N_H}{18}}\,\frac{\alpha(\mu)}{\alpha_s(\mu)} \tag{27}$$

somit:

$$\sin^2\theta_w(\mu) = 0.226 \ldots 0.234 \tag{28}$$

mit

$$M \approx 10^{16} \text{ GeV} \quad \text{und} \quad \alpha_0 \approx 0.040 \tag{29}$$

Dieser Wert für $\sin^2\theta_w$ stimmt überragend genau mit den experimentellen Daten überein.

5 ANHANG

(i) Beweis der Formel (9):

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du \int_0^\infty e^{-s}s^{y-1}ds = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(u+s)}u^{x-1}s^{y-1}ds\right)du$$

Substitutionen:

$$r = u + s \qquad q = \frac{s}{u+s}$$

$$\Longrightarrow du\,ds = r\,dr\,dq \qquad 0 < r < \infty \qquad 0 < q < 1$$

$$q = \frac{s}{r} \Longleftrightarrow s = rq \qquad u = r(1-q)$$

$$\Longrightarrow \Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-r}r^{x-1+y-1+1}dr \int_0^1 q^{y-1}(1-q)^{x-1}dq$$

$$= \Gamma(x+y) \int_0^1 q^{y-1}(1-q)^{x-1} dq$$

Substitutionen:

$$q = \frac{1}{t^2+1} \Longrightarrow dq = -\frac{2t}{(t^2+1)^2} dt$$

$$1 - q = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^\infty t\,(1+t^2)^{-2}(1+t^2)^{1-y} \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{x-1} dt$$

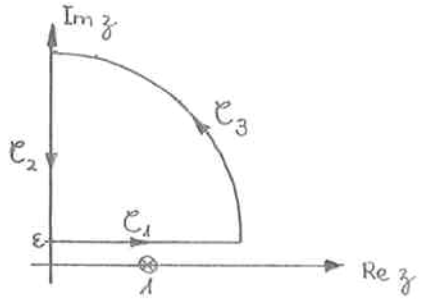
$$\Longrightarrow B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^\infty t^{2x-1}(1+t^2)^{-(x+y)} dt$$

q.e.d.

(ii) Beweis der Formel (10):
Betrachte die komplexwertige Funktion

$$f(z) = \frac{z^{2x-1}}{(z^2-1)^{x+y}} = (-1)^{-(x+y)} \frac{z^{2x-1}}{(1-z^2)^{x+y}}$$

Diese besitzt Pole an den Stellen ± 1. Betrachte nun folgendes Kuvenintegral:



Es gilt:

$$\oint f(z)dz = 0$$

$$C_3 : z = Re^{i\phi} + i\epsilon \Longrightarrow dz = iRe^{i\phi} d\phi$$

$$\left|\int_{C_3} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{iRe^{i\phi}(Re^{i\phi}+i\epsilon)^{2x-1} d\phi}{\left[(Re^{i\phi}+i\epsilon)^2 - 1\right]^{x+y}}\right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{R(R+\epsilon)^{2x-1}}{[(R-\epsilon)^2-1]^{x+y}} \to 0$$

$(R \to \infty)$, falls $x < y$

Damit:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} f(z)dz = -\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)dz$$

also:

$$\int_{i\epsilon}^{i\infty} \frac{z^{2x-1}dz}{(z^2-1)^{x+y}} = \int_{i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{z^{2x-1}dz}{(z^2-1)^{x+y}}$$

Vom linken Integral existiert der Grenzwert $\epsilon \to 0$, denn:
Substitution: $z = it$

$$\Longrightarrow 2\int_{i\epsilon}^{i\infty} \frac{z^{2x-1}dz}{(z^2-1)^{x+y}} = i^{2x}(-1)^{-(x+y)}2\int_{\epsilon}^{\infty} t^{2x-1}(1+t^2)^{-(x+y)}dt$$

$$= i^{2x}(-1)^{-(x+y)}B(x,y) \qquad (\epsilon \to 0)$$

Damit existiert dieser Genzwert auch für das rechte Integral, und es folgt:

$$2\int_{0}^{\infty} \frac{z^{2x-1}dz}{(z^2-1)^{x+y}} = i^{2x}(-1)^{-(x+y)}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

q.e.d.